Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik
Institut für Analysis

K-Theorie und K-Homologie in grober Geometrie

Masterarbeit

Autorin:	Jil Ann-Christin Klünder
Matrikelnummer:	2845840
Studiengang:	M. Sc. Mathematik
E-Mail:	j.kluender@stud.uni-hannover.de
Erstprüfer:	Prof. Dr. Elmar Schrohe
Zweitprüferin:	Prof. Dr. Julie Rowlett

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung

K-Theorie, K-Homologie und grobe Geometrie gewinnen durch ihre Interdisziplinarität und ihre Anwendungen in der Index- und Operatortheorie, der Differentialgeometrie sowie in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zunehmend an Bedeutung.

Die durch die K-Theorie entstehenden K-Theorie-Gruppen stellen eine topologische Invariante von Vektorraumbündeln dar, deren Definition auch auf C^*-Algebren ausgeweitet werden kann.
Die K-Theorie auf topologischen und metrischen Räumen wird ebenso thematisiert wie die höhere K-Theorie, die unter Verwendung der Suspension eingeführt wird.
Die Bott-Periodizität stellt einen Zusammenhang zwischen der nullten und der zweiten K-Theorie-Gruppe her.

Die K-Homologie ist auf dualen Algebren definiert und führt auf diesen eine ähnliche Struktur wie die der K-Theorie-Gruppen ein. Ebenso wie die K-Theorie-Gruppen sind auch die K-Homologie-Gruppen homotopieinvariant. Ausschneidungen führen zu exakten Sequenzen von K-Homologie-Gruppen, die bei der Berechnung der Gruppen hilfreich sind.

Bei der groben Geometrie ist vor allem die Betrachtung auf Abbildungskegeln interessant, da diese oftmals einfacher zu handhaben ist als die grobe Geometrie der C^*-Algebra. Es wird auch die C^*-Algebra von groben Räumen betrachtet, was die Definition von lokal kompakten Operatoren auf einem topologischen Raum ermöglicht.

Eine der zentralen Aussagen dieser Arbeit ist die Paschke-Dualität, da diese die Existenz einer Isomorphie zwischen der K-Theorie einer Quotientenalgebra und der K-Homologie des untergeordneten Raumes impliziert.

Eilenberg Swindle ermöglichen schließlich die explizite Angabe von einzelnen K-Theorie- und K-Homologie-Klassen.

Abstract

Caused by multidisciplinarity and applications in index and operator theory, in differential geometry and in the theory of partial differential equations, the mathematic sub-topics of K-theory, K-homology and coarse geometry are becoming increasingly important.

K-theory is the basis for defining K-theory-groups, which are topological invariants on vectorbundles on topological or metric spaces, and can be generalized on C^*-algebras. We will look at both the K-theory of topological and metric spaces and the higher K-theory, which is introduced via suspension.
Bott periodicity induces a connection between the zeroth and the second K-theory-group.

K-homology is defined on dual algebras and introduces an analogon of the K-theory-groups on these. Both the K-theory- and the K-homology-groups are homotopy-invariant.
Excision brings us some exact sequences of K-theory- and K-homology-groups, which allow the calculation of certain groups.

In coarse geometry, we look at cones, because these are much easier to handle than the C^*-algebras. Nonetheless, the coarse geometry of C^*-algebras is an important topic. Therefore, it will be introduced as well to define some kind of local compact operators on topological spaces.

One of the main statements of this thesis is the Paschke-duality, which implies the existence of an isomorphy between the K-theory of a quotient algebra and the K-homology of the underlying space.

Eilenberg swindle facilitate the calculation of some K-theory- and K-homology-groups.

1 Einleitung

Bei der K-Theorie, der K-Homologie und der groben Geometrie handelt es sich um junge Teilgebiete der Mathematik, die zunehmend an Bedeutung gewinnen und in immer mehr Bereichen der Mathematik Anwendung finden.
Die K-Theorie ist die Theorie einer topologischen Invarianten auf Vektorraumbündeln, wohingegen die daraus entstehende K-Homologie Pseudodifferentialoperatoren auf Vektorraumbündeln oder Fredholm-Module auf C^*-Algebren klassifiziert.
In der groben Geometrie werden nicht wie üblich lokale Eigenschaften untersucht, sondern die Räume global betrachtet. So werden - grob gesprochen - metrische Räume als äquivalent aufgefasst, wenn sie aus großer Entfernung gleich aussehen.

Das Ziel der hier vorliegenden Arbeit ist sowohl der Beweis als auch die Anwendung der sogenannten Paschke-Dualität (Satz 6.1.4). Diese liefert eine Aussage über den Zusammenhang zwischen der K-Theorie einer Quotientenalgebra und der topologischen K-Homologie des untergeordneten kompakten Raums.

Satz (Paschke-Dualität) *[HR00] Es sei X ein lokal kompakter Raum, der mit einer eigentlichen groben Struktur ausgestattet ist. Ferner gebe es eine nicht-entartete Darstellung von $C_0(X)$ auf einem Hilbertraum H. Dann gilt:*

(i) Die Inklusion von $D^*(X)$ in $\mathfrak{D}^*(X)$ induziert einen Isomorphismus

$$D^*(X)/C^*(X) \cong \mathfrak{D}^*(X)/\mathfrak{C}^*(X).$$

(ii) Ist die Darstellung von $C_0(X)$ zusätzlich ampel, so gibt es einen Isomorphismus

$$K_{p+1}\left(D^*(X)/C^*(X)\right) \cong K_p(X).$$

Diese Aussage liefert eine Grundlage für die Berechnung von K-Theorie-Gruppen unter Verwendung von K-Homologie und findet als solche vielfach Anwendung.

Diese Arbeit soll sowohl einen Überblick über die K-Theorie, die grobe Geometrie und die K-Homologie liefern, als auch einen Ausblick auf einige Anwendungen der drei Bereiche ermöglichen.

Dabei werden in dieser Arbeit nahezu alle notwendigen Grundlagen ausgearbeitet. Lediglich grundlegende Kenntnisse aus den Bereichen der Operatortheorie und der Funktionalanalysis werden vorausgesetzt. Diese finden sich beispielsweise in John Conway's „A Course into Functional Analysis"([Con90]).
Ebenso wird ein grundsätzliches Verständnis der Theorie von Fundamentalgruppen und von Wirkungen auf diesen vorausgesetzt. Eine gute Grundlage hierfür bietet beispielsweise das Buch "Algebraic topology" ([Hat02]) von Allen Hatcher.

Über die Struktur dieser Arbeit

Diese Arbeit orientiert sich vor allem am Buch "Analytic K-Homology" von Nigel Higson und John Roe ([HR00]).

Die Einführung in die K-Theorie erfolgt zu Beginn dieser Arbeit im zweiten Kapitel. Es folgen eine Thematisierung der relativen K-Theorie (Abschnitt 2.3), der Homotopieinvarianz der K-Theorie (Bemerkung 2.5.7) und des sogenannten Ausschneide-Satzes (Satz 2.3.13), der für das weitere Vorgehen benötigt wird. Als wesentliche Eigenschaft der K-Theorie wird auch die Halbexaktheit (Lemma 2.3.10 und Lemma 2.3.14) behandelt. Die Definition der höheren K-Theorie-Gruppen erfolgt in Abschnitt 2.4. In Abschnitt 2.6 wird schließlich das K-Theorie-Produkt eingeführt. Die Einführung der K-Theorie endet mit der Aussage und dem Beweis des Bott-Periodizität-Theorems (Satz 2.7.6), welches zunächst eine Verbindung zwischen der nullten und der zweiten K-Theorie-Gruppe herstellt, und sich schließlich auf alle K-Theorie-Gruppen verallgemeinern lässt. Dieses ermöglicht dann auch die Angabe der sechstermigen kurzen exakten Sequenz (2.7.1), die die Berechnung einiger K-Theorie-Gruppen ermöglicht.

Die Grundlagen der groben Geometrie werden im dritten Kapitel behandelt. Grobe Strukturen, grobe Abbildungen und grobe Homotopieäquivalenzen sind grundlegend für das weitere Vorgehen dieser Arbeit und für die Anwendungen im letzten Kapitel.
Ein besonderer Schwerpunkt liegt dabei auf der groben Geometrie auf Kegeln (Abschnitt 3.2) und auf der Definition der C^*-Algebra von groben Räumen (Abschnitt 3.3). Die erste Kernaussage dieser Arbeit wird schließlich in Proposition 3.4.4 formuliert und bewiesen. Diese besagt, dass die K-Theorie-Klassen $K_p(C^*(\mathbb{R}^+ \times Y))$ für einen eigentlichen metrischen Raum Y trivial sind.

Die K-Homologie und duale Algebren werden im vierten Kapitel eingeführt. Sie erlauben nicht nur eine erneute Betrachtung der K-Theorie von topologischen groben Strukturen in Abschnitt 4.4, sondern sind von wesentlicher Bedeutung für die Anwendungen, die am Ende dieser Arbeit in Kapitel 6 ausgearbeitet werden. Auf Grundlage der relativen K-Homologie ist es möglich, eine weitere kurze exakte Sequenz (4.3.1) anzugeben, die vielfach Anwendung finden wird. Die Homotopieinvarianz der K-Homologie wird in Korollar 4.5.1 formuliert. Das Ende des Kapitels bildet Kasparovs Lemma (Lemma 4.6.6).

Der Schwerpunkt des fünften Kapitels liegt auf elliptischen Differentialoperatoren (Abschnitt 5.3) und den Aussagen von Rellichs Lemma 5.3.4 und Gårdings Ungleichung 5.3.5. Die Einführung der Homologie-Klasse eines selbstadjungierten Operators erfolgt im letzten Abschnitt des Kapitels in Definition 5.5.10.

Das abschließende Kapitel zeigt einige in der groben Geometrie hilfreiche Anwendungen der K-Theorie und der K-Homologie auf. Neben der Paschke-Dualität, die in Abschitt 6.1 formuliert und bewiesen wird, und der Einführung des groben Index im darauf folgenden Abschnitt, wird auch die äquivariante Assembly-Abbildung (Definition 6.3.3) definiert. Die Räume, auf denen diese Abbildung ein Isomorphismus ist, werden ebenfalls klassifiziert. Dafür werden in Satz 6.4.10 auch die K-Theorie-Gruppen für die C^*-Algebra und die D^*-Algebra eines Raumes von der Form $X \times [0,\infty)$ berechnet. Dieser abschließende Beweis, der zu einer expliziten Angabe der K-Theorie-Gruppen der zuvor genannten Räume führt, vereint nahezu alle zuvor eingeführten Teilbereiche der Mathematik.

Notation

Im Verlauf der gesamten Arbeit wird folgende Notation[1)] verwendet:
Es bezeichne H einen - sofern nicht anders angegeben - komplexen Hilbertraum und $\mathfrak{B}(H)$ sei die Algebra aller beschränkten linearen Operatoren auf H, das heißt

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}(H) &= \{T : H \to H : T \text{ ist linear und beschränkt}\}\\ &= \{T : H \to H : \|T\| = \sup\{\|Tv\| : \|v\| \leq 1\} < \infty\}.\end{aligned}$$

Diese bildet zusammen mit der oben angegebenen Operatornorm eine Banachalgebra.

[1)] Alle hier nicht erwähnten Symbole und Bezeichnungen können im Symbolverzeichnis auf Seite 99 nachgelesen werden.

Ferner werde mit X ein topologischer Raum bezeichnet und $C(X)$ sei die Menge aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf X. Mit der Supremumsnorm und der komplexen Konjugation als Involution wird $C(X)$ zu einer Banach-$*$-Algebra. Außerdem ist $C(X)$ eine C^*-Algebra.
Ist X lokal kompakt, so bezeichne $C_0(X)$ die Menge aller stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden. Auch $C_0(X)$ ist eine C^*-Algebra, die jedoch nur dann ein Einselement hat, wenn X kompakt ist.

Darüber hinaus bezeichne $\mathfrak{k}(H)$ die Banachalgebra aller kompakten Operatoren auf H. Die Quotientenalgebra

$$\mathfrak{Q}(H) := \mathfrak{B}(H)/\mathfrak{k}(H)$$

heißt Calkin-Algebra.

2 K-Theorie

Die topologische K-Theorie geht auf die Mathematiker Michael Francis Atiyah (*1929) und Friedrich Hirzebruch (1927-2012) zurück, die die Arbeit Alexander Grothendiecks (1928-2014) im Rahmen der algebraischen Geometrie auf die Topologie und die Operatortheorie ausgeweitet haben.

Die K-Theorie kann in zwei verschiedene Bereiche unterteilt werden:

(i) Die topologische K-Theorie beschäftigt sich mit dem Studium von Vektorraumbündeln auf topologischen Räumen.

(ii) Die algebraische K-Theorie ist auf Ringen bzw. Schemata definiert.

Die Verallgemeinerung der topologischen K-Theorie auf C^*-Algebren bildet die Grundlage der für diese Arbeit benötigten K-Theorie. Sie ist vor allem interessant, weil es sich bei den K-Theorie-Gruppen (oder kurz K-Gruppen) um topologische Invarianten handelt, die viele nützliche Eigenschaften haben.

Dieses Kapitel orientiert sich in erster Linie an [HR00]. Weiterführende und vertiefende Aussagen zur K-Theorie finden sich in [Ati67] oder - speziell für die K-Theorie auf C^*-Algebren - in [RLL00a].

2.1 Grundlagen der K-Theorie

Die K-Theorie auf C^*-Algebren hat als Erweiterung der topologischen K-Theorie eine wesentlich größere Bedeutung für diese Arbeit, weshalb letztere nur kurz eingeführt und die wichtigsten Gruppen definiert werden sollen, bevor die Idee auf C^*-Algebren übertragen wird.

Definition 2.1.1 [HR00, S. 85] Es sei $(X,\mathcal{O})$ ein kompakter topologischer Raum, der der Hausdorff-Trennungseigenschaft genügt. Die abelsche Gruppe, die von den Isomorphieklassen von komplexen Vektorraumbündeln über X erzeugt wird, ist die nullte K-Theorie-Gruppe und wird mit $K_0(X)$ bezeichnet.
Auf dieser Gruppe betrachten wir folgende Gruppenoperation: Für zwei komplexe Vektorraumbündel E und F über X sei die Summe der Isomorphieklassen durch die

Formel

$$[E] + [F] := [E \oplus F]$$

gegeben.

Vektorraumbündel über einem topologischen Raum X lassen sich durch eine Projektion auf den Raum der $n \times n$-Matrizen mit komplexen Einträgen definieren, das heißt durch eine Abbildung $p\colon X \to M_n(\mathbb{C})$, sodass $p(x)$ für jedes $x \in X$ die Gleichung

$$p = p^* = p^2$$

erfüllt. Dabei sei $n \in \mathbb{N}$ und p^* bezeichne die Involutionsabbildung, das heißt, p ist selbstinvers und erfüllt $p = p^2$.
Vergrößern wir nun die Dimension des Bildraums der Projektionsabbildung, indem n gegen unendlich geht, so erhalten wir eine Bijektion zwischen den Isomorphieklassen von Vektorraumbündeln über X und den Homotopieklassen der Funktionen, deren Funktionswerte Projektionen im Sinne der vorangegangenen Definition sind.
Dies rechtfertigt folgende äquivalente Definition der abelschen Gruppe $K_0(X)$:

Definition 2.1.2 [HR00, S. 86] Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathcal{P}$ der Raum der Projektionen von X auf $M_n(\mathbb{C})$. Dann ist $K_0(X)$ die abelsche Gruppe, die von den Homotopieklassen von Abbildungen aus $\mathcal{P}$ erzeugt wird.

Diese Definition lässt sich nun verallgemeinern. Dafür benötigen wir jedoch zunächst die Definitionen einer C^*-Algebra und eines $*$-Homomorphismus.

Definition 2.1.3 Eine C^*-Algebra A ist eine Banachalgebra über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit einer Involutionsabbildung $*\colon A \to A$, sodass für alle $a, b \in A$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) $(a+b)^* = a^* + b^*$
(ii) $(\lambda a)^* = \bar{\lambda} a^*$
(iii) $(ab)^* = b^* a^*$
(iv) $(a^*)^* = a$

Darüber hinaus fordern wir für $a \in A$

$$\|a^* a\| = \|a^2\|.$$

Eine C^*-Algebra heißt unital, wenn es ein Einselement $e \in A$ gibt mit $\|e\| = 1$.

Wir betrachten zunächst ein paar Beispiele.

Beispiel 2.1.4 Die bekanntesten Beispiele von C^*-Algebren sind folgende:

(i) $C(X)$, die Menge aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf einem topologischen Raum X, mit der Supremumsnorm und der komplexen Konjugation als Involutionsabbildung
(ii) $C_0(X)$, die Menge aller stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden, versehen mit der Supremumsnorm und der komplexen Konjugation
(iii) $\mathfrak{B}(H)$, die Menge aller beschränkten linearen Operatoren auf einem Hilbertraum H mit der Adjunktion als Involutionsabbildung
(iv) $\mathfrak{k}(H)$, die Menge aller kompakten, beschränkten linearen Operatoren auf H

Definition 2.1.5 Gegeben seien zwei C^*-Algebren A und B. Ein $*$-Homomorphismus ist eine Abbildung $\varphi\colon A \to B$, die linear, multiplikativ und mit der Involution verträglich ist.

Häufig empfiehlt es sich, anstelle einer C^*-Algebra eine Darstellung selbiger auf einem Hilbertraum zu betrachten. Diese ist wie folgt durch einen $*$-Homomorphismus definiert:

Definition 2.1.6 Es sei A eine C^*-Algebra und H ein Hilbertraum. Eine Darstellung von A ist ein $*$-Homomorphismus $\rho\colon A \to \mathfrak{B}(H)$.
Die Darstellung heißt nicht-entartet, wenn $\{0\}$ der einzige abgeschlossene invariante Unterraum ist, auf dem die Einschränkung von ρ der Nulldarstellung entspricht.

Definition 2.1.7 [HR00, S. 124, Def. 5.1.3] Die Darstellung $\rho\colon A \to \mathfrak{B}(H)$ einer C^*-Algebra A ist ampel, wenn sie nicht-entartet ist und wenn kein Nullelement in A auf H wie ein kompakter Operator agiert.
Eine Projektion P heißt ampel, wenn der Operator $P\rho(a)$ nur für $a = 0$ kompakt ist.

Wir werden vielfach fordern, dass die C^*-Algebra ein Einselement besitzt. Sollte dies nicht der Fall sein, können wir die Algebra $\tilde{A}$ betrachten, die aus A wie folgt hervorgeht:

Definition 2.1.8 [HR00, S. 10, Def. 1.3.8] Ist A eine C^*-Algebra ohne Einselement, so sei $\tilde{A}$ die C^*-Algebra mit multiplikativem Inversen, die A als geschlossenes, zweiseitiges Ideal der Kodimension 1 enthält. Diese ist eindeutig bis auf kanonisch isometrische $*$-Homomorphismen.
Die so entstehende C^*-Algebra nennen wir die Unitalisierung von A.

Bemerkung 2.1.9 [Roe96, S. 24] Die Unitalisierung der Algebra A lässt sich auch wie folgt auffassen:
Es sei A eine nicht-unitale C^*-Algebra. Dann sei A^+ gegeben durch

$$A^+ := A \oplus \mathbb{C} = \{a + \lambda \cdot 1 \colon a \in A, \lambda \in \mathbb{C}\}.$$

Die Unitalisierung $\tilde{A}$ von A ist dann die aus A^+ hervorgehende C^*-Algebra, die A als geschlossenes Ideal enthält.
Aus dieser Darstellung von $\tilde{A}$ wird ersichtlich, dass im Allgemeinen $A \neq \tilde{A}$ gilt. Dies gilt insbesondere auch dann, wenn A unital ist. In diesem Fall stimmen die Einselemente aus A nicht mit denen aus $\tilde{A}$ überein.

Bei den topologischen K-Theorie-Gruppen haben wir Projektionen von X auf den Raum der $n \times n$-Matrizen betrachtet. Unter Berücksichtigung der C^*-Algebren betrachten wir nun Projektionen von der C^*-Algebra auf $M_n(C(X))$, also auf den Raum der $n \times n$-Matrizen mit Einträgen aus dem Raum $C(X, \mathbb{R})$ der stetigen Funktionen von X nach $\mathbb{R}$.

Dies ermöglicht folgende Definition:

Definition 2.1.10 [HR00, S. 86, Def. 4.1.1] Es sei A eine C^*-Algebra mit Einselement. Dann ist $K_0(A)$ die abelsche Gruppe, die für jedes $n \in \mathbb{N}$ und für jede Projektion p in der Matrix-Algebra $M_n(A)$ durch eine Äquivalenzklasse erzeugt wird, die wie folgt gegeben ist: Es gelte

(i) $[p] = [q]$ für zwei Projektionen p und q auf $M_n(A)$, die sich durch einen stetigen Weg von Projektionen in $M_n(A)$ verbinden lassen.
(ii) $[0] = 0$ für jede quadratische Nullmatrix.
(iii) $[p] + [q] = [p \oplus q]$ für zwei Projektionsmatrizen p und q.

Bemerkung 2.1.11 [HR00, S. 86, Def. 4.1.1] Es seien $m, n \in \mathbb{N}$. Ferner seien $p \in M_m(A)$ und $q \in M_n(A)$. Dann ist $p \oplus q$ gegeben durch

$$p \oplus q := \begin{bmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{bmatrix} \in M_{m+n}(A).$$

Definition 2.1.12 [HR00, S. 86] Zwei Projektionen p und q heißen homotop, wenn sie durch einen stetigen Weg von Projektionen verbunden werden können.
Existiert eine weitere Projektion r, sodass $p \oplus q' \oplus r$ durch einen stetigen Weg von Projektionen mit $p' \oplus q \oplus r$ verbunden werden kann, so heißen p und q stabil homotop.

Bemerkung 2.1.13 [HR00, S. 86, Rem. 4.1.2] Jedes Element von $K_0(A)$ ist formal eine Differenz $[p] - [q]$ von zwei Projektionen auf $M_n(A)$ für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$. Zwei Elemente $[p] - [q]$ und $[p'] - [q']$ aus $K_0(A)$ definieren also genau dann die gleiche Äquivalenzklasse, wenn sie stabil homotop sind.

Bemerkung 2.1.14 [HR00, S. 86] K_0 ist ein Funktor. Das heißt, ist $\alpha\colon A \to B$ ein unitaler $*$-Homomorphismus zwischen zwei C^*-Algebren A und B, und ist p eine Projektion auf $M_n(A)$, so ist $\alpha(p)$ eine Projektion auf $M_n(B)$. Demnach induziert α einen Homomorphismus $\alpha_*\colon K_0(A) \to K_0(B)$.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden noch zwei weitere Äquivalenzrelationen, nämlich die unitäre Äquivalenz und die Murray-von-Neumann-Äquivalenz, benötigt. Diese Relationen sind wie folgt gegeben:

Definition 2.1.15 [HR00, S. 88, Def. 4.1.9] Es seien p und q zwei Projektionen in einer unitalen C^*-Algebra A. Dann heißen p und q unitär äquivalent, wenn sie für ein unitales $u \in A$ die Gleichung

$$upu^* = q$$

erfüllen.
Wir sagen, dass p und q Murray-von-Neumann-äquivalent sind, wenn es ein $v \in A$ gibt, sodass $v^*v = p$ und $vv^* = q$ gilt. In diesem Fall nennen wir v eine Murray-von-Neumann-Äquivalenz.

Die vorangestellten Definitionen führen tatsächlich auf Äquivalenzrelationen.
Darüber hinaus impliziert Homotopie unitäre Äquivalenz, welche wiederum Murray-von-Neumann-Äquivalenz impliziert. Im Allgemeinen gelten die Umkehrungen jedoch nicht. Sie sind aber gültig, wenn wir Matrizen betrachten. Dann sind sämtliche zuvor definierten Äquivalenzrelationen äquivalent zueinander. Dies sehen wir mit Hilfe des folgenden Lemmas:

Lemma 2.1.16 *[HR00, S. 88, Lem. 4.1.10] Es sei v eine partielle Isometrie auf einer unitalen C^*-Algebra, das heißt, es gelte $vv^*v = v$. Dann ist die Matrix*

$$\begin{pmatrix} v & 1 - vv^* \\ v^*v - 1 & v^* \end{pmatrix}$$

unitär und kann durch einen Weg von Einselementen mit der Einheitsmatrix verbunden werden.
Insbesondere kann die Matrix

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & v^* \end{pmatrix}$$

durch Einselemente mit der Einheitsmatrix verbunden werden, wenn v unitär ist.

Beweis: Wir betrachten den Weg

$$t \mapsto \begin{pmatrix} (\cos(\frac{\pi}{2}t))v & 1 - (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))vv^* \\ (1 - \sin(\frac{\pi}{2}t))vv^* - 1 & (\cos(\frac{\pi}{2}t))v^* \end{pmatrix}.$$

Dieser Weg besteht aus Einselementen und verbindet die Matrix $(*)$ mit

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Diese Matrix können wir wiederum mit Hilfe des gleichen Weges mit $v = 1$ mit der Identität verbinden können. □

Satz 2.1.17 *[HR00, S. 88, Prop. 4.1.11] Gegeben seien zwei Murray-von-Neumann-äquivalente Projektionen p und q in einer unitalen C^*-Algebra A. Dann sind $p \oplus 0$ und $q \oplus 0$ unitär äquivalent über eine unitäre 2×2-Matrix M, die homotop zur Identität ist. Dadurch sind auch $p \oplus 0$ und $q \oplus 0$ homotop.*

Um im weiteren Verlauf dieses Kapitels die Existenz einiger kurzer exakter Sequenzen zu beweisen, benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 2.1.18 *[HR00, S. 88, Lem. 4.1.12] Es seien A eine unitale C^*-Algebra und p und q Projektionen auf A. Dann repräsentieren p und q genau dann das gleiche Element in $K_0(A)$, wenn $p \oplus I_m \oplus 0_n$ und $q \oplus I_m \oplus 0_{n'}$ Murray-von-Neumann-äquivalent sind. Dabei bezeichne I_m die m-dimensionale Einheitsmatrix und 0_n sowie $0_{n'}$ seien Nullmatrizen.*
Insbesondere entsprechen Murray-von-Neumann-äquivalente Projektionen dem gleichen Element in $K_0(A)$.

Beweis: Aus Satz 2.1.17 folgt, dass Murray-von-Neumann-äquivalente Projektionen homotop zueinander sind. Daraus folgt die Rückrichtung des Lemmas.
Um die andere Richtung zu beweisen, nehmen wir an, dass p und q die gleiche K-Theorie-Gruppe definieren. Durch Ergänzung von geeigneten Nullmatrizen können wir ohne Einschränkung annehmen, dass p und q zur gleichen Matrixalgebra über A gehören. Nach Bemerkung 2.1.13 gibt es eine Projektion r, sodass $p \oplus r$ homotop zu $q \oplus r$ ist. Dadurch ist $p \oplus r \oplus (1-r)$ homotop zu $q \oplus r \oplus (1-r)$. Die durch $r \oplus (1-r)$ gegebene Projektion ist zudem homotop zu $1 \oplus 0$, weshalb $p \oplus 1 \oplus 0$ homotop zu $q \oplus 1 \oplus 0$ ist. Da wir bereits zuvor gesehen haben, dass Homotopie die Murray-von-Neumann-Äquivalenz impliziert, schließt dies den Beweis ab. □

Stellvertretend für verschiedene Beispiele wollen die K-Theorie-Gruppen der komplexen Zahlen und die K-Theorie-Gruppe von $\mathfrak{B}(H)$ betrachten und damit diese Einführung abschließen:

Beispiel 2.1.19 [HR00, S. 86, Ex. 4.1.3] Wir betrachten die C^*-Algebra $A = \mathbb{C}$. Zwei Projektionen in $M_n(\mathbb{C})$ lassen sich genau dann durch einen Weg von Projektionen verbinden, wenn sie den gleichen Rang haben. Die Abbildung $[p] \mapsto \operatorname{rang} p$ induziert also einen Isomorphismus von $K_0(\mathbb{C})$ nach $\mathbb{Z}$.

Beispiel 2.1.20 [HR00, S. 89, Ex. 4.1.13] Es sei H ein unendlich dimensionaler Hilbertraum und $A = \mathfrak{B}(H)$ die C^*-Algebra aller beschränkten Operatoren auf H. Dann sind zwei Projektionen auf A mit unendlich dimensionalem Urbild Murray-von-Neumann-äquivalent. Deshalb sind für jede Projektion p die Projektionen $p \oplus 1$ und $0 \oplus 1$ Murray-von-Neumann-äquivalent. Auf $K_0(\mathfrak{B}(H))$ gilt also

$$[p] + [1] = [0] + [1],$$

woraus $[p] = [0] = 0$ folgt. Deshalb ist $K_0(\mathfrak{B}(H)) = 0$.

2.2 K_0 für nicht-unitale C^*-Algebren

Die Definition der nullten K-Theorie-Gruppe, die wir in Definition 2.1.10 verwendet haben, funktioniert auch im Falle nicht-unitaler C^*-Algebren. Allerdings ist das Ergebnis nicht zielführend, sodass wir stattdessen auf folgende Definition zurückgreifen:

Definition 2.2.1 [HR00, S. 90, Def. 4.2.1] Es sei J eine nicht-unitale C^*-Algebra und $\tilde{J}$ die Unitalisierung, die durch Definition 2.1.8 gegeben ist. Dann gibt es eine kurze exakte Sequenz

$$0 \to J \to \tilde{J} \to \mathbb{C} \to 0.$$

Wir bezeichnen mit $K_0(J)$ den Kern des induzierten Homomorphismus

$$K_0(\tilde{J}) \to K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}.$$

Bemerkung 2.2.2 [HR00, S. 91, Rem. 4.2.2] Die Definition von $K_0(J)$ kann man im nicht-unitalen Fall auch wie folgt auffassen:
Es sei $J = C_0(X)$ für einen lokal kompakten Hausdorff-Raum X. Das heißt, dass für jedes $x \in X$ jede Umgebung von x eine kompakte Umgebung enthält. Dann gilt für die Einpunktkompaktifizierung $\tilde{J} = C(\tilde{X})$, wobei $\tilde{X}$ die Ein-Punkt-Kompaktifizierung von X ist. Das heißt, wir definieren die K-Theorie von X als jene von $\tilde{X}$ relativ zum Punkt in ∞. Auf diese Weise wird die K-Theorie üblicherweise für lokal kompakte Räume eingeführt.

Hat J bereits ein Einselement, so kann man zeigen, dass die durch Definition 2.2.1 entstehende K-Theorie-Gruppe mit der durch Definition 2.1.10 gegebenen Gruppe übereinstimmt.[1)]
Es ist uns also gelungen, K_0 als Funktor auf die Menge aller C^*-Algebren und $*$-Homomorphismen auszudehnen.

[1)]Dies ist auf die exakte Splittung der K-Theorie-Sequenz $0 \to K_0(J) \to K_0(\tilde{J}) \to K_0(\mathbb{C}) \to 0$ zurückzuführen ([HR00, S. 91]).

Im Folgenden wollen wir die Stabilisierungsabbildungen als Beispiel für einen nicht-unitalen $*$-Homomorphismus einführen:

Definition 2.2.3 [HR00, S. 91] Es sei A eine nicht notwendigerweise unitale C^*-Algebra. Dann sind die Stabilisierungsabbildungen $A \to M_n(A)$ durch die Vorschrift

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben.

Für die Stabilisierungsabbildungen gilt Folgendes:

Lemma 2.2.4 *[HR00, S. 91, Lem. 4.2.4] Es sei A unital. Dann induzieren die Stabilisierungsabbildungen Isomorphismen auf der K-Theorie.*

Beweis: Da $M_k(M_n(A))$ isomorph zu $M_{kn}(A)$ ist, können wir Projektionen auf $M_n(A)$ auch als Projektionen über A auffassen. Auf diese Weise erhalten wir eine Abbildung

$$K_0(M_n(A)) \to K_0(A).$$

Diese Abbildung ist eine zweiseitige Inverse für die Stabilisierungsabbildung. □

Bemerkung 2.2.5 Lemma 2.2.4 gilt auch im nicht-unitalen Fall.[2)]

Beispiel 2.2.6 [HR00, S. 92, Ex. 4.2.5] Die C^*-Algebra $\mathfrak{k}(H)$, die aus allen kompakten Operatoren besteht, ist der direkte Grenzwert einer Folge

$$M_2(\mathbb{C}) \subseteq M_4(\mathbb{C}) \subseteq M_8(\mathbb{C}) \subseteq \dots$$

Die Inklusionsabbildungen sind dabei durch die Stabilisierungsabbildungen gegeben und induzieren somit Isomorphismen auf der K-Theorie. Nach Beispiel 2.1.19 gilt $K_0(\mathfrak{k}(H)) \cong \mathbb{Z}$, das heißt, die Isomorphismen senden eine Projektion p mit endlich-dimensionalem Rang auf die Dimension des Bildes von p, also auf $\dim(\mathrm{Im}\,(p))$.
Ist e nun eine Projektion vom Rang 1, so induziert der $*$-Homomorphismus $a \mapsto a \otimes e$ für jede C^*-Algebra A einen Isomorphismus $K_0(A) \cong K_0(A \otimes \mathfrak{k}(H))$.

Bemerkung 2.2.7 Die in Beispiel 2.2.6 beschriebene Eigenschaft wird auch als Stabilität der K-Theorie bezeichnet.

2)Die Aussage kann in [HR00, S. 91, Lemma 4.2.4] nachgelesen werden.

2.3 Relative K-Theorie

Um aus der K-Theorie die K-Homologie zu entwickeln, benötigen wir die relative K-Theorie, die an dieser Stelle eingeführt werden soll.

Dafür erweitern wir zunächst die bereits bekannte Definition des Ideals eines Rings auf Algebren:

Definition 2.3.1 Es sei A eine C^*-Algebra. Unter einem Ideal $J \subset A$ verstehen wir ein zweiseitiges Ideal, das unter der Involution abgeschlossen ist, das heißt, für jedes $a \in J$ liegt auch a^* in J.

Bemerkung 2.3.2 [HR00, S. 17] Mit der vorangegangenen Definition wird J selbst auch wieder zu einer C^*-Algebra.

Wie auch bei C^*-Algebren ist es bei Idealen häufig notwendig, die Existenz eines Einselements voraussetzen zu können. Dieses ist jedoch oftmals bei Letzteren nicht vorhanden, und die C^*-Algebra $\tilde{J}$, die wir durch Ergänzung des Einselements erhielten, wäre kein Ideal mehr. Deshalb führen wir die approximierte Eins ein:

Definition 2.3.3 [HR00, S. 18, Def. 1.7.1] Es sei I eine Indexmenge. Eine approximierte Eins für eine C^*-Algebra A ist ein Netz $\{u_\alpha\}_{\alpha\in I}$, das aus denjenigen positiven Elementen in A besteht, die folgende Eigenschaften erfüllen:

(i) Für alle $\alpha \in I$ sei $\|u_\alpha\| \leq 1$.
(ii) Für $\alpha \geq \beta$ sei $u_\alpha \geq u_\beta$.
(iii) Für jedes $a \in A$ sei $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \|au_\alpha - a\| = 0$.

Bemerkung 2.3.4 [HR00, S. 18, Prop. 1.7.2] Man kann zeigen, dass jede C^*-Algebra eine approximierte Eins besitzt.

Zum besseren Verständnis soll nun ein Beispiel betrachtet werden, in dem wir eine approximierte Eins konstruieren.

Beispiel 2.3.5 [HR00, S. 18, Ex. 1.7.3] Wir betrachten $A = C_0(X)$ für einen topologischen, abzählbaren Raum X. Dann lässt sich eine approximierte Eins wie folgt konstruieren:
Zunächst benötigen wir eine offene Überdeckung von X. Dazu seien offene Mengen U_n, $n \in \mathbb{N}$, so gewählt, dass

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = X$$

und so, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Abschluss $\bar{U}_n$ in U_{n+1} liegt. Nun wählen wir stetige Funktionen u_n mit Werten aus $[0,1]$, deren Träger in U_{n+1} liegen, und die auf U_n identisch 1 sind. Diese Abbildungen u_n erfüllen die Eigenschaften aus Definition 2.3.3 und bilden somit eine approximierte Eins von $C_0(X)$.

Sofern nicht anders angegeben, sei A im Folgenden eine unitale C^*-Algebra und J ein Ideal in A. Ferner sei $\pi\colon A \to A/J$ die Quotientenabbildung.

Bemerkung 2.3.6 Es ist nicht klar, dass unter den obigen Voraussetzungen der mit der Quotientennorm ausgestattete Quotientenraum A/J wieder eine C^*-Algebra ist. Der Beweis findet sich in [HR00, S. 18, Th. 1.7.4].

Um die relative K-Gruppen auf dem Quotientenraum A/J zu definieren, benötigen wir sogenannte K-Zykel.

Definition 2.3.7 [HR00, S. 92, Def. 4.3.1] Ein relativer K-Zykel für $(A, A/J)$ ist ein Tripel (p, q, x) bestehend aus zwei Projektionen p und q aus $M_n(A)$ und einem $x \in M_n(A)$. Dabei sei $\pi(x) \in M_n(A/J)$ eine partielle Isometrie, die eine Murray-von Neumann-Äquivalenz zwischen $\pi(p)$ und $\pi(q)$ definiert.
Ist x selbst auch eine Murray-von Neumann-Äquivalenz zwischen p und q, so heißt der K-Zykel (p, q, x) entartet oder degeneriert.

Bevor wir mit dieser Definition die relativen K-Theorie-Gruppen einführen, betrachten wir folgendes Beispiel:

Beispiel 2.3.8 [HR00, S. 92, Ex. 4.3.2] Es sei $T \in \mathfrak{B}(H)$ ein beschränkter Operator, für den sowohl $T^*T - I$ als auch $TT^* - I$ kompakt sind. Ferner sei $A = \mathfrak{B}(H)$ und $J = \mathfrak{k}(H)$. Dann ist der Quotientenraum A/J die Calkin-Algebra $\mathfrak{Q}(H)$. Nach Definition ist $\pi(T)$ ein Einselement in der Calkin-Algebra. Aus diesem Grund ist das Tripel (I, I, T) ein relativer K-Zykel von $(A, A/J) = (\mathfrak{B}(H), \mathfrak{Q}(H))$.

Definition 2.3.9 [HR00, S. 92, Def. 4.3.3] Die relative K-Gruppe $K_0(A, A/J)$ ist die abelsche Gruppe, die für jeden relativen K-Zykel (p, q, x) einen Erzeuger $[p, q, x]$ hat, sodass die folgenden Eigenschaften gelten:

(i) Sind (p_0, q_0, x_0) und (p_1, q_1, x_1) relative K-Zykel, die durch einen stetigen Weg (p_t, q_t, x_t) im Raum der relativen K-Zykel miteinander verbunden werden können, so stimmen die Äquivalenzklassen überein, das heißt
$$[p_0, q_0, x_0] = [p_1, q_1, x_1].$$

(ii) Ist (p, q, x) entartet, so ist
$$[p, q, x] = 0.$$

(iii) Für die Äquivalenzklassen der relativen K-Zykel (p,q,x), (p',q',x') gelte

$$[p\oplus p', q\oplus q', x\oplus x'] = [p,q,x] + [p',q',x'].$$

Unter der Vorschrift $[p,q,x] \mapsto [p]-[q]$ wird $K_0(A,A/J)$ auf natürliche Weise auf $K_0(A)$ abgebildet. Dies erlaubt die Angabe folgender exakter Sequenz.

Lemma 2.3.10 *[HR00, S. 93, Prop. 4.3.5] Die Sequenz von Gruppen*

$$K_0(A,A/J) \to K_0(A) \to K_0(A/J)$$

ist in der Mitte, das heißt an der Stelle $K_0(A)$, exakt.

Beweis: Zur vereinfachten Notation bezeichne $\pi\colon K_0(A) \to K_0(A/J)$ die Quotientenabbildung und

$$\partial\colon K_0(A,A/J) \to K_0(A)$$

die durch die Vorschrift

$$[p,q,x] \mapsto [p]-[q]$$

gegebene Abbildung. Damit folgt

$$[p,q,x] \overset{\partial}{\mapsto} [p]-[q] \overset{\pi}{\mapsto} [\pi(P)]$$

für eine geeignete Projektion P.
Um die Exaktheit in der Mitte zu zeigen, müssen wir zeigen, dass $\ker\pi = \operatorname{Im}\partial$ gilt.
Es sei also $[p,q,x] \in K_0(A,A/J)$. Da dies der Erzeuger eines relativen K-Zykels ist, definiert $\pi(x)$ eine Murray-von-Neumann-Äquivalenz zwischen $\pi(p)$ und $\pi(q)$, das heißt, es gilt

$$(\star)\qquad \begin{aligned} \pi(x)^*\pi(x) &= \pi(p) \\ \pi(x)\pi(x)^* &= \pi(q). \end{aligned}$$

Daraus folgt nun

$$(\pi\circ\partial)([p,q,x]) = [\pi(p)]-[\pi(q)] \overset{(\star)}{=} [0],$$

woraus $\operatorname{Im}\partial \subset \ker\pi$ folgt.
Sei nun also $[P] \in \ker\pi$. Dann ist $[\pi(P)] = [0]$. In diesem Fall existiert für ein geeignetes $n\in\mathbb{N}$ ein $X \in M_n(A/J)$, sodass

$$\begin{aligned} X^*X &= \pi(P) \\ XX^* &= 0. \end{aligned}$$

Wir wählen nun $\tilde{X} \in M_n(A)$ so, dass $\pi(\tilde{X}) = X \in M_n(A/J)$. Der Erzeuger $[P, 0, \tilde{X}]$ des K-Zykels liegt in $K_0(A, A/J)$. Deshalb ist auch $\ker \pi \subset \operatorname{Im} \partial$.
Insgesamt folgt also $\ker \pi = \operatorname{Im} \partial$ und damit die Exaktheit der Sequenz. □

Bemerkung 2.3.11 [HR00, S. 93] Man kann zeigen, dass $K_0(A, A/J)$ stets isomorph zu $K_0(J)$ ist. Das heißt, $K_0(A, A/J)$ hängt nur von der Struktur des Ideals J, aber nicht von der Struktur der C^*-Algebra A, in die J als Ideal eingebettet ist, ab. In Analogie zur Algebraischen Topologie heißen solche Theoreme Ausschneide-Sätze (excision theorems).

Ausschneide-Sätze bilden einen wichtigen Teilbereich der Topologie und sind für das weitere Vorgehen in dieser Arbeit relevant. Aus diesem Grund definieren wir nun die damit in Zusammenhang stehende Ausschneide-Abbildung:

Definition 2.3.12 [HR00, S. 93, Def. 4.3.7] Es sei J ein Ideal in einer unitalen Algebra A. Dann ist J selbst eine C^*-Algebra und wir können $\tilde{J}$ als Unteralgebra von A auffassen. Die natürliche Abbildung

$$\mathrm{ex}\colon K_0(J) = K_0(\tilde{J}, \mathbb{C}) \to K_0(A, A/J)$$

heißt Ausschneide-Abbildung.

Satz 2.3.13 (Ausschneide-Satz) *[HR00, S. 93, Th. 4.3.8] Die Ausschneide-Abbildung ist ein Isomorphismus.*

Beweisskizze: Zunächst zeigt man, dass die Abbildung bijektiv ist. Für die Surjektivität ist zu zeigen, dass jeder relative K-Zykel (p, q, x) für $(A, A/J)$ äquivalent zu einem relativen K-Zykel für $(\tilde{J}, \mathbb{C})$ ist.
Dies zeigt man in drei Schritten:

(i) Man bildet die direkte Summe mit dem entarteten Zykel $(1-p, 1-p, 1-p)$. Danach zeigt eine Rotation, dass (p, q, x) äquivalent zu einem K-Zykel von der Form (p', q', x') ist, wobei p' eine Matrix über $\tilde{J}$ ist.

(ii) Nach [HR00, S. 88, Prop. 4.1.11] ist die Matrix

$$\begin{bmatrix} \pi(x') & 1 - \pi(x')\pi(x')^* \\ \pi(x')\pi(x')^* - 1 & \pi(x')^* \end{bmatrix}$$

über A/J unitär, mit der Identität durch einen Weg von Einselementen verbunden, und konjugiert zu $\pi(p') \oplus 0$ und $\pi(q') \oplus 0$. Liftet man diesen Weg von Einselementen zu einem Weg U_t von Einselementen in A, so ergibt sich, dass der Zykel (p', q', x') äquivalent zu einem Zykel von der Form (p'', q'', x'') ist, wobei p'' eine Matrix mit Einträgen in $\tilde{J}$ ist, und $x'' = p''U_1$. Dabei ist U_1 eine unitäre Matrix über A, die mit der Identität durch einen Weg U_t verbunden ist.

(iii) Da die Abbildung $t \mapsto U_t$ ein Weg von unitären Matrizen ist, besteht der Weg

$$t \mapsto (p'', U_t^* U_1 q'' U_1^* U_t, p'' U_t)$$

aus relativen K-Zykeln. Demnach ist der Zykel (p'', q'', x'') äquivalent zu einem Zykel von der Form (p''', q''', x'''). Dabei hat p''' Einträge in $\tilde{J}$, es gilt $x''' = p'''$ und dadurch hat auch q Einträge in $\tilde{J}$. Insgesamt ist (p''', q''', x''') ein Zykel für $(\tilde{J}, \mathbb{C})$.

Die Injektivität folgt mit ähnlichen Überlegungen, indem man diese auf einen Weg anwendet, der die gleichen Endpunkte hat. □

Aus diesem Lemma ergibt sich eine zweite exakte Sequenz:

Lemma 2.3.14 *[HR00, S. 96, Prop. 4.3.15] Es sei J ein Ideal in einer C^*-Algebra A. Dann ist die Sequenz von K-Theorie-Gruppen*

$$K_0(J) \to K_0(A) \to K_0(A/J)$$

in der Mitte exakt.

Beweis: Wie bereits beim Beweis von Lemma 2.3.10 betrachten wir die Abbildungen

$$\begin{aligned} \varepsilon\colon K_0(A, A/J) &\to K_0(A) \\ [p, q, x] &\mapsto [p] - [q] \end{aligned}$$

und

$$\pi\colon K_0(A) \to K_0(A/J) \text{ sowie ex} \qquad : K_0(J) \to K_0(A, A/J).$$

Damit erhalten wir eine neue Abbildung

$$\delta := \mathrm{ex} \circ \varepsilon\colon K_0(J) \to K_0(A).$$

Um die Exaktheit der Sequenz zu zeigen, müssen die Inklusionen $\mathrm{Im}\ \delta \subset \ker \pi$ und $\ker \pi \subset \mathrm{Im}\ \delta$, also $\mathrm{Im}\ \delta = \ker \pi$, gelten.
Wir haben bereits im Beweis von Lemma 2.3.10 gesehen, dass $\mathrm{Im}\ \varepsilon \subset \ker \pi$ gilt. Da die Ausschneide-Abbildung ex ein Isomorphismus und damit insbesondere bijektiv ist, gilt $\mathrm{Im\ ex} = \mathrm{ex}(K_0(J)) = K_0(A, A/J)$. Deshalb ist $\mathrm{Im}\ (\mathrm{ex} \circ \varepsilon) = \mathrm{Im}\ \varepsilon \subset \ker \pi$.
Es sei nun $[P] \in \ker \pi$. Dann ist $[\pi(P)] = [0]$. Für ein geeignetes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $X \in M_n(A/J)$, sodass $X^*X = \pi(P)$ und $XX^* = 0$. Wir wählen also $\tilde{X} \in M_n(A)$ so, dass $\pi(\tilde{X}) = X \in M_n(A/J)$. Der Erzeuger des K-Zykels $(P, 0, \tilde{X})$ liegt in $K_0(A, A/J)$. Da ex ein Isomorphismus ist, gibt es ein $[Q] \in K_0(J)$, sodass $\mathrm{ex}([Q]) = [P, 0, \tilde{X}]$. Damit folgt $\ker \pi \subset \mathrm{Im}\ \delta$ und insgesamt also $\ker \pi = \mathrm{Im}\ \delta = \mathrm{Im}\ (\mathrm{ex} \circ \varepsilon)$. □

Bemerkung 2.3.15 Die in den Lemmata 2.3.10 und 2.3.14 beschriebenen Eigenschaften werden als Halbexaktheit bezeichnet.

2.4 Höhere K-Theorie

Bislang wurde nur die K-Theorie-Gruppe K_0 betrachtet. Aber um allgemeinere Aussagen treffen zu können, ist es notwendig, auch höhere K-Theorie-Gruppen zu definieren. Diese werden nun unter Verwendung der Halbexaktheit als Resultat der Lemmata 2.3.10 und 2.3.14 eingeführt.

Definition 2.4.1 [HR00, S. 98, Def. 4.5.1] Es sei A eine C^*-Algebra und J ein Ideal in A. Der Abbildungskegel $C(A,A/J)$ des surjektiven $*$-Homomorphismus $\pi\colon A \to A/J$ ist die Algebra, die aus Paaren (a,f) mit $a \in A$ und $f: [0,1] \to A/J$ besteht. Dabei ist f eine stetige Abbildung, die $f(0) = 0$ und $f(1) = \pi(a)$ erfüllt.

Proposition 2.4.2 *[HR00, S. 98, Prop. 4.5.3] Der $*$-Homomorphismus $J \to C(A,A/J)$, der durch die Vorschrift $a \mapsto (a,0)$ gegeben ist, induziert einen Isomorphismus von $K_0(J)$ nach $K_0(C(A,A/J))$.*

Beweis: Die natürliche Abbildung bettet J als Ideal in $C(A,A/J)$ ein und die Quotientenalgebra $C(A,A/J)/J$ entspricht der Algebra $C(A/J)$, die kontrahierbar ist und deren K-Theorie-Gruppen verschwinden. Daher folgt aus der Halbexaktheit (Lemma 2.3.14) die Surjektivität der Abbildung $K_0(J) \to K_0(C(A,A/J))$.
Um die Injektivität zu zeigen, betrachten wir eine weitere Algebra Q, die durch die Algebra aller stetigen Funktionen $f: [0,1] \to A$ mit $f(0) \in J$ gegeben sei. Dann gibt es natürliche Homomorphismen $J \to Q$ (als konstante Funktionen) und $Q \to J$ (durch Auswertung der Funktion bei 0). Diese beiden Abbildungen sind Homotopie-Inverse, weshalb $K_0(J)$ isomorph zu $K_0(Q)$ ist. Andererseits gibt es eine surjektive Abbildung $Q \to C(A,A/J)$, deren Kern die kontrahierbare Algebra $C_0[0,1) \otimes J$ ist. Aus der Halbexaktheit folgt nun, dass die Abbildung $K_0(J) = K_0(Q) \to K_0(C(A,A/J))$ injektiv ist.

□

Wesentlich für die Definition der höheren K-Theorie-Gruppen ist die Suspension einer C^*-Algebra, mit der wir dann die höheren K-Theorie-Gruppen definieren können.

Definition 2.4.3 [HR00, S. 98, Def. 4.5.4] Die Suspension $S(A)$ einer C^*-Algebra A ist die Algebra von stetigen Funktionen $f: [0,1] \to A$ mit $f(0) = f(1) = 0$.

Definition 2.4.4 [HR00, S. 98, Def. 4.5.5] Es sei A eine C^*-Algebra. Dann sind die höheren K-Theorie-Gruppen wie folgt definiert:

$$K_p(A) = K_0(S^p(A)).$$

Dabei sei $S^p(A) = (S \circ \ldots \circ S)(A) = S(S(\cdots S(A)))$.

Betrachten wir eine kommutative, unitale C^*-Algebra $A = C(X)$, und eine beliebige C^*-Algebra B, so definieren wir mit $C(X,B)$ die C^*-Algebra der stetigen Funktionen auf X mit Werten in B, die wir mit der Supremumsnorm und der punktweisen Involution versehen. In diesem Fall lässt sich die Abbildung

$$f \otimes b \mapsto fb$$

vom algebraischen Tensorprodukt $A \otimes B$ nach $C(X,B)$ zu einem $*$-Isomorphismus von $C(X) \otimes B$ nach $C(X,B)$ erweitern.
Dies ermöglicht es uns, die Suspension von A auf eine andere Weise zu schreiben.

Bemerkung 2.4.5 Identifizieren wir $\mathbb{R}$ unter Verwendung eines orientierungserhaltenden Homöomorphismus, der beispielsweise durch

$$x \mapsto (x - \frac{1}{2}) \cdot (x(1-x))^{-1}$$

gegeben sei, mit dem offenen Intervall $(0,1)$, so können wir auch

$$S(A) = C_0(0,1) \otimes A = C_0(\mathbb{R}) \otimes A$$

beziehungsweise allgemeiner

$$S^p(A) = C_0(\mathbb{R}^p) \otimes A$$

schreiben.

Die Suspension und der Abbildungskegel lassen sich durch folgende kurze exakte Sequenz in Verbindung zueinander bringen:

$$0 \to S(A/J) \to C(A, A/J) \to A \to 0.$$

Dabei ist der erste $*$-Homomorphismus durch die Abbildung $f \mapsto (0, f)$ gegeben. Dieser induziert eine Abbildung

$$K_1(A/J) = K_0(S(A/J)) \to K_0(C(A, A/J)) = K_0(J).$$

Definition 2.4.6 [HR00, S. 99, Def. 4.5.7] Die Abbildung $\partial\colon K_1(A/J) \to K_0(J)$ heißt Rand-Abbildung assoziiert zur kurzen exakten Sequenz

$$0 \to J \to A \to A/J \to 0.$$

Zwischen den K-Theorie-Gruppen und den relativen K-Theorie-Gruppen gibt es folgenden Zusammenhang:

Proposition 2.4.7 *[HR00, S. 99, Prop. 4.5.8] Es sei*

$$0 \to J \to A \to A/J \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren. Dann ist die Sequenz von Gruppen und Homomorphismen

$$K_1(A/J) \xrightarrow{\partial} K_0(J) \to K_0(A) \to K_0(A/J)$$

exakt.

Iteriert man das zuvor beschriebene Vorgehen, so erhält man eine semi-unendliche exakte Sequenz.

Satz 2.4.8 *[HR00, S. 99, Prop. 4.5.9] Es sei*

$$0 \to J \to A \to A/J \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren. Dann gibt es eine natürliche semi-unendliche exakte Sequenz von abelschen Gruppen und Homomorphismen

$$\ldots \to K_p(J) \to K_p(A) \to K_p(A/J) \to K_{p-1}(J) \to K_{p-1}(A) \to K_{p-1}(A/J) \to \ldots$$

Wir wollen nun den Begriff der (halb-)gesplitteten kurzen exakten Sequenz einführen.

Definition 2.4.9 [HR00, S. 131, Def. 5.3.6] Es sei

$$0 \to J \to A \to B \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Wir sagen, diese Sequenz ist (halb-)gesplittet, wenn die Quotientenabbildung $\tilde{A} \to \tilde{B}$ einen positiven Schnitt zulässt.

Damit können wir nun eine kurze exakte Sequenz von K-Theorie-Gruppen angeben.

Satz 2.4.10 *[HR00, S. 99, Prop. 4.5.10] Ist die Sequenz*

$$0 \to J \to A \to A/J \to 0$$

zwischen A/J nach A durch einen $*$-Homomorphismus gesplittet, so ist die zugehörige K-Theorie-Sequenz

$$0 \to K_p(J) \to K_p(A) \to K_p(A/J) \to 0$$

exakt-gesplittet.

Unter Verwendung dieser exakten Sequenz können wir nun eine wichtige Aussage beweisen.

Lemma 2.4.11 *[HR00, S. 101, Lem. 4.6.1] Es sei A eine nicht notwendigerweise unitale C^*-Algebra und E sei eine unitale C^*-Algebra, die A als Ideal enthält. Ferner sei u ein Einselement in E. Dann induziert die Abbildung Ad_u, die durch*

$$Ad_u(a) = uau^*$$

gegeben ist, die Identität auf den K-Theorie-Gruppen $K_p(A)$.

Beweis: Da A als Ideal in E enthalten ist, können wir eine weitere C^*-Algebra D wie folgt definieren:

$$D := \{e_1 \oplus e_2 \in E \oplus E : e_1 - e_2 \in A\}.$$

Die C^*-Algebra A ist in D als Ideal $A \oplus 0$ enthalten, und der Quotient D/A ist isomorph zu E. Die Abbildung $e \mapsto e \oplus e$ splittet die Quotientenabbildung $E \to D$. Unter Verwendung von Satz 2.4.10 wird nun $K_0(A)$ in $K_0(D)$ überführt. Ist $w = u \oplus u \in D$, so erhalten wir folgendes kommutative Diagramm:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}_v"'] & D \arrow[d, "\mathrm{Ad}_w"'] \\ A \arrow[r] & D \end{tikzcd}$$

Die horizontalen Abbildungen induzieren Injektionen auf K_0 und Ad_w induziert die Identität auf $K_0(D)$, weshalb Ad_u die Identität auf $K_0(A)$ induzieren muss.
Für $p = 1$ folgt die Aussage nun wie zuvor. □

Wir betrachten nun Lemma 2.4.11 für eine Isometrie $v \in A$, das heißt, es gilt $v^*v = 1$. Dann definiert $\mathrm{Ad}_v(a) = vav^*$ einen Endomorphismus, und wir erhalten die folgende Aussage.

Lemma 2.4.12 *[HR00, S. 102, Lem. 4.6.2] Es sei v eine Isometrie in A. Dann definiert der Endomorphismus $Ad_v(a) = vav^*$ die Identität auf der K-Theorie.*

Beweis: Wir betrachten zunächst das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Ad}_v"'] & M_2(A) \arrow[d, "\mathrm{Ad}_w"'] \\ A \arrow[r] & M_2(A) \end{tikzcd}$$

Dabei seien die horizontalen Pfeile durch die Stabilisierungsabbildungen aus Lemma 2.2.4 gegeben und w sei definiert durch

$$w = \begin{pmatrix} v & 1 - vv^* \\ v^*v - 1 & v^* \end{pmatrix}.$$

Da w ein Einselement in $M_2(A)$ ist, folgt das Resultat aus Lemma 2.4.11. □

2.5 Homotopie

Wesentlich für die K-Theorie ist die Eigenschaft der Homotopieinvarianz, die wir in diesem Kapitel betrachten wollen.

Dafür erinnern wir zunächst an die Definition zweier homotoper Abbildungen:

Erinnerung 2.5.1 [Bro98, S. 11] Es seien X ein kompakter Hausdorff-Raum und

$$f, g \colon X \to Y.$$

f und g heißen homotop, wenn es eine stetige Abbildung

$$F \colon X \times [0,1] \to Y$$

gibt, sodass die Gleichungen $F_0 = F(\cdot, 0) = f$ und $F_1 = F(\cdot, 1) = g$ gelten.

Diese können wir nun auf $*$-Homomorphismen verallgemeinern:

Definition 2.5.2 [WO93, S. 121, Def. 6.4.1] Es seien A und B zwei C^*-Algebren und $\alpha, \beta \colon A \to B$ zwei $*$-Homomorphismen. Dann sind α und β homotop, wenn es einen Weg $\{\gamma_t \colon A \to B : t \in [0,1]\}$ gibt, sodass $t \mapsto \gamma_t(a)$ für jedes feste $a \in A$ ein stetiger Weg in B ist und darüber hinaus $\gamma_0 = \alpha$ und $\gamma_1 = \beta$ gelten.

In Bemerkung 2.1.14 haben wir angemerkt, dass K_0 ein Funktor ist, und dass es einen natürlichen Homomorphismus $\alpha_* \colon K_0(A) \to K_0(B)$ gibt, wenn $\alpha \colon A \to B$ ein unitaler $*$-Homomorphismus zwischen zwei C^*-Algebren A und B ist. Diese Erkenntnis wollen wir nun nutzen, um die Homotopieinvarianz der K-Theorie zu formulieren. Für den Beweis benötigen wir jedoch noch zwei Propositionen.

Proposition 2.5.3 (Ausschneide-Satz von Tietze) *[Bro98, S. 12, Prop. 2.27] Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und Y eine abgeschlossene Teilmenge von X. Ferner sei E ein Vektorraumbündel über X. Dann kann jeder stetige Schnitt $s \colon Y \to E_{|Y}$ auf X fortgesetzt werden.*

Proposition 2.5.4 *[Bro98, S. 12, Prop. 2.26] Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und Y eine abgeschlossener Unterraum von X. Darüber hinaus seien E und F Vektorraumbündel über X. Ist $f: E_{|Y} \to F_{|Y}$ ein Isomorphismus, so existieren eine offene Teilmenge U mit $Y \subset U$ und eine Erweiterung $f: E_{|U} \to F_{|U}$ von f, die ein Isomorphismus ist.*

Beweisskizze: Da F ein Schnitt auf $\mathrm{Hom}(E_{|Y}, F_{|Y})$ ist, kann F zu einem Schnitt auf $\mathrm{Hom}(E, F)$ fortgesetzt werden. Es sei U die Menge der Punkte, für die die Fortsetzung ein Isomorphismus ist. Diese Menge ist offen und enthält Y.

Damit können wir nun die Homotopieinvarianz der K-Theorie formulieren.

Satz 2.5.5 *[Bro98, S. 11 f., Prop. 2.26] Es seien X ein kompakter Hausdorff-Raum und $f, g: X \to Y$ homotop. Dann gibt es für jedes Vektorraumbündel E einen Isomorphismus*

$$f^*E \simeq g^*E.$$

Beweisskizze: Um dies zu beweisen, zeigt man zunächst, dass die Isomorphieklasse des Vektorraumbündels F_t^*E unabhängig von t ist. Dabei sei $F: X \times [0,1] \to Y$ die Homotopie zwischen f und g. Es bezeichne $\pi: X \times [0,1] \to X$ die Projektionsabbildung auf den ersten Faktor, also $\pi(x,t) = x$. Dann stimmen die Vektorraumbündel F^*E und $\pi^* F_t^* E$ überein, sofern sie auf die geschlossenen Unterräume $X \times \{t\}$ von $X \times [0,1]$ eingeschränkt werden.
Man kann nun zeigen, dass die Bündel F^*E und $\pi^* F_t^* E$ isomorph auf $X \times \delta t$ sind, wobei δt eine Umgebung von t in $[0,1]$ ist. Aus diesem Grund ist die Isomorphieklasse $[F_t^*E]$ auf dem Vektorraumbündel F_t^*E eine lokal konstante Funktion von t. Da das Einheitsintervall zusammenhängend ist, ist diese Funktion auch global konstant und führt auf

$$f^*E = F_0^*E \simeq F_1^*E = g^*E.$$

□

Aus dem vorangegangenen Satz folgt nun die Homotopieinvarianz der K-Theorie.

Satz 2.5.6 *[Bro98, S. 11 f., Prop. 2.26] Es seien f und g wie in Satz 2.5.5. Dann stimmen die von f und g induzierten Abbildungen auf den K-Theorie-Gruppen überein, das heißt*

$$K_0(f) = K_0(g): K_0(X) \to K_0(Y).$$

Bemerkung 2.5.7 (Homotopieinvarianz der K-Theorie) [HR00, S. 97, Prop. 4.4.3] Die Aussage des vorangegangenen Satzes lässt sich auch wie folgt formulieren:
Es seien α_0 und α_1 homotope $*$-Homomorphismen von A nach B. Dann stimmen die induzierten K-Theorie-Abbildungen α_{0*} und α_{1*} von $K_0(A)$ nach $K_0(B)$ überein.

Für spätere Zwecke benötigen wir noch die Definition einer kontrahierbaren C^*-Algebra.

Definition 2.5.8 [HR00, S. 97, Def. 4.4.4] Eine C^*-Algebra A heißt kontrahierbar, wenn der Identitätshomomorphismus (aufgefasst als Abbildung $A \to A$) homotop zum verschwindenden Homomorphismus ist.

Definition 2.5.9 [HR00, S. 97, Def. 4.4.7] Ein $*$-Homomorphismus $\alpha\colon A \to B$ heißt Homotopie-Äquivalenz, wenn es einen $*$-Homomorphismus $\beta\colon B \to A$ gibt, sodass die Verkettungen $\alpha \circ \beta$ und $\beta \circ \alpha$ homotop zur Identität auf A bzw. B sind.
Man bezeichnet α bzw. β dann auch als Homotopieinverse.

2.6 K-Theorie-Produkt

Ziel dieses Unterkapitels ist die Einführung eines bilinearen und assoziativen äußeren Produktes

$$\times\colon K_{p_1}(A_1) \times K_{p_2}(A_2) \to K_{p_1+p_2}(A_1 \otimes A_2)$$

für zwei C^*-Algebren A_1 und A_2. Dabei bezeichnet $\times$ sowohl das Produkt auf den K-Theorie-Klassen als auch das kartesische Produkt. Die Bedeutung ergibt sich jedoch stets aus dem Zusammenhang.

Bemerkung 2.6.1 Es seien A_1 und A_2 unitale C^*-Algebren und q_1 bzw. q_2 Projektionen auf A_1 bzw. A_2. Dann ist $q_1 \otimes q_2$ eine Projektion auf das Tensorprodukt $A_1 \otimes A_2$.

Diese Beobachtung lässt sich auch auf Matrizen anwenden: Es gibt kanonische Isomorphismen $M_{n_1}(\mathbb{C}) \otimes M_{n_2}(\mathbb{C}) \cong M_{n_1 n_2}(\mathbb{C})$. Sind nun wieder q_1 bzw. q_2 Projektionen auf $M_{n_1}(A_1)$ bzw. $M_{n_2}(A_2)$, so definiert $q_1 \otimes q_2$ eine Projektion auf $M_{n_1 n_2}(A_1 \otimes A_2)$.
Dies rechtfertigt die Definition des Produktes

$$\times\colon K_0(A_1) \times K_0(A_2) \to K_0(A_1 \otimes A_2).$$

Dieses Produkt ist assoziativ und bilinear, da es eine Abbildung zwischen abelschen Gruppen ist.
In Kapitel 2.4 hatten wir die höheren K-Theorie-Gruppen $K_p(A)$ in Abhängigkeit von Suspensionen $S^p(A) = C_0(\mathbb{R}^p) \otimes A$ von A definiert. Es kann passieren, dass die Suspensionen auch in dem Fall, dass A unital ist, nicht unital sind. Deshalb müssen wir das K_0-Produkt so verallgemeinern, dass es auch im nicht-unitalen Fall zulässig ist. Den ersten Ansatz dafür liefert folgendes Lemma.

Lemma 2.6.2 *[HR00, S. 103, Lem. 4.7.2] Es seien A_1 und A_2 zwei nicht notwendigerweise unitale C^*-Algebren und $\tilde{A_1}$ bzw. $\tilde{A_2}$ deren Unitalisierungen. Ferner sei*

$$\pi_j \colon \tilde{A_j} \to \mathbb{C}$$

für $j = 1, 2$ der unitale $*$-Homomorphismus mit Kern A_j. Dann ist

$$K_0(A_1 \otimes A_2) = \ker(\pi_* \colon K_0(\tilde{A_1} \otimes \tilde{A_2}) \to K_0(\tilde{A_1}) \oplus K_0(\tilde{A_2}))$$

mit $\pi = (1 \otimes \pi_2, \pi_1 \otimes 1)$.

Bemerkung 2.6.3 [HR00, S. 104] Durch dieses Lemma ist gewährleistet, dass das Produkt

$$K_0(\tilde{A_1}) \times K_0(\tilde{A_2}) \to K_0(\tilde{A_1} \otimes \tilde{A_2}) \tag{2.6.1}$$

die Untergruppe $K_0(A_1) \times K_0(A_2)$ auf der linken Seite auf die Untergruppe $K_0(A_1 \otimes A_2)$ auf der rechten Seite abbildet.

Dies rechtfertigt folgende Definition:

Definition 2.6.4 [HR00, S. 104, Def. 4.7.4] Es seien A_1 und A_2 zwei C^*-Algebren. Das Produkt

$$\times \colon K_0(A_1) \times K_0(A_2) \to K_0(A_1 \otimes A_2)$$

ist die Einschränkung von Gleichung (2.6.1) auf $K_0(A_1) \times K_0(A_2)$.
Das verallgemeinerte äußere Produkt

$$\times \colon K_{p_1}(A_1) \times K_{p_2}(A_2) \to K_{p_1+p_2}(A_1 \otimes A_2)$$

erhalten wir durch das Produkt auf K_0 unter Verwendung des Isomorphismus

$$S^{p_1}(A_1) \otimes S^{p_2}(A_2) \cong S^{p_1+p_2}(A_1 \otimes A_2).$$

Bemerkung 2.6.5 [HR00, S. 104, Rem. 4.7.5] Der in der vorangegangenen Definition verwendete Isomorphismus geht auf die Identifikation von $C_0(\mathbb{R}^{p_1}) \otimes C_0(\mathbb{R}^{p_2})$ mit $C_0(\mathbb{R}^{p_1+p_2})$ zurück:
Die Koordinaten von $\mathbb{R}^{p_1}$ werden auf die ersten p_1 Koordinaten des $\mathbb{R}^{p_1+p_2}$ abgebildet, und die Koordinaten des $\mathbb{R}^{p_2}$ dementsprechend auf die letzten p_2 Koordinaten.

Nach Definition ist das auf diese Weise gewonnene Produkt bilinear und assoziativ. Es ist gewissermaßen auch funktorial im Sinne der folgenden Sätze.

Satz 2.6.6 *[HR00, S. 104, Prop. 4.7.6] Es sei A eine C^*-Algebra. Ist $\alpha\colon A \to A'$ ein $*$-Homomorphismus, und ist B eine weitere C^*-Algebra, so gilt für $x \in K_p(A)$ und $y \in K_q(B)$ die Gleichung*

$$\alpha_*(x) \times y = (\alpha \otimes 1)_*(x \times y).$$

Außerdem gilt

Satz 2.6.7 *[HR00, S. 105, Prop. 4.7.7] Es seien A und B zwei C^*-Algebren. Dann gilt:*

(i) Die Klasse des Erzeugers $1 \in K_0(\mathbb{C})$ ist ein zweiseitiges Einselement für das äußere Produkt, das heißt, es gilt

$$\alpha'_*(1 \times x)x = \alpha''_*(x \times 1)$$

für alle $x \in K_p(A)$, wobei

$$\alpha'\colon \mathbb{C} \otimes A \to A \text{ und } \alpha''\colon A \otimes \mathbb{C} \to A$$

die kanonischen Isomorphismen sind.

(ii) Das äußere Produkt ist kommutativ graduiert in folgendem Sinn: Für alle $x \in K_p(A)$ und $y \in K_q(B)$ ist

$$y \times x = (-1)^{pq}\theta_*(x \times y),$$

wobei $\theta\colon A \otimes B \to B \otimes A$ der 'flip'-Isomorphismus ist.

2.7 Bott-Periodizität

Die sogenannte Bott-Abbildung $\beta_A\colon K_0(A) \to K_2(A)$ definiert einen Isomorphismus zwischen der nullten und der zweiten K-Theorie-Gruppe. Aus diesem Grund stellt die Bott-Periodizität eine der wichtigsten Eigenschaften der K-Theorie dar.

Für die genaue Aussage benötigen wir jedoch zunächst einige Definitionen:

Definition 2.7.1 [HR00, S. 34, Def. 2.3.1] Es sei S^1 der Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Der Hardy-Raum $H^2(S^1)$ ist der abgeschlossene Unterraum von $L^2(S^1)$, der von den Funktionen z^n für $n \geq 0$ aufgespannt wird. Ein Toeplitz-Operator auf $H^2(S^1)$ ist ein beschränkter Operator T_g von der Form

$$T_g(f) = P(gf), f \in H^2(S^1).$$

Dabei ist $g \in L^\infty(S^1)$ und P ist die orthogonale Projektion von $L^2(S^1)$ auf $H^2(S^1)$. g heißt dann Symbol von T_g.

Wir erinnern an die Definition der Windungszahl einer stetigen Funktion

$$g\colon S^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Erinnerung 2.7.2 [HR00, S. 34] Es sei $g\colon S^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ eine stetige Abbildung. Die Windungszahl $\mathrm{wind}(g) \in \mathbb{Z}$ ist die Klasse in der Fundamentalgruppe $\pi_1(\mathbb{C}\setminus\{0\})$, die wir derart mit $\mathbb{Z}$ identifizieren, dass die Identität die Windungszahl $\mathrm{wind}(\mathrm{id}) = +1$ hat.

Das Toeplitz-Index-Theorem stellt nun einen Zusammenhang zwischen der Windungszahl und dem Index eines Toeplitz-Operators her:

Satz 2.7.3 *[HR00, S. 34, Th. 2.3.2] Es sei T_g ein Toeplitz-Operator auf $H^2(S^1)$, sodass das Symbol g eine stetige und nirgends verschwindende Funktion auf S^1 ist. Dann ist T_g ein Fredholm-Operator und es gilt*

$$Index(T_g) = -wind(g).$$

Beweis: Es sei M_g der Operator der komponentenweisen Multiplikation mit g auf $L^2(S^1)$. Die Menge aller stetigen Funktionen g, für die der Kommutator $PM_g - M_gP$ kompakt ist, ist eine C^*-Unteralgebra von $C(S^1)$. Dabei liegt die Identität in dieser C^*-Algebra, da in diesem Fall der Operator Rang 1 hat. Da die Funktion $g(z) = z$ den Raum $C(S^1)$ als C^*-Algebra erzeugt, ist $PM_g - M_gP$ für jede stetige Funktion g kompakt.
Identifizieren wir nun T_g mit PM_g, so erhalten wir für alle stetigen Funktionen g_1 und g_2 die Gleichungen

$$\begin{aligned} T_{g_1}T_{g_2} &= PM_{g_1}PM_{g_2} = PPM_{g_1}M_{g_2} + \text{kompakt} \\ &= PM_{g_1g_2} + \text{kompakt} \\ &= T_{g_1g_2} + \text{kompakt}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt für eine stetige und nirgends verschwindende Funktion g, dass $T_{g^{-1}}$ modulo kompakter Operatoren invers zu T_g ist, und nach Atkinsons Theorem ist T_g ein Fredholm-Operator.
Die Stetigkeit des Fredholm-Index zeigt, dass $\mathrm{Index}(T_g)$ nur von der Homotopie-Klasse der stetigen Funktion $g\colon S^1 \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ abhängt. Es ist demnach ausreichend, den Satz für einen Repräsentanten in jeder Homotopie-Klasse zu beweisen.
Dies kann man nun ähnlich wie zuvor für die Funktionen $g(z) = z^n$ machen. □

Wir können nun eine kurze exakte Sequenz konstruieren, die so genannte Toeplitz-Erweiterung. Dazu betrachten wir wieder den Hardy-Raum $H^2(S^1)$. Ferner sei $\mathfrak{T}$ die

C^*-Unteralgebra von $\mathfrak{B}(H^2(S^1))$, die durch die kompakten und die Toeplitz-Operatoren T_g für alle $g \in C(S^1)$ erzeugt wird. Das Bild $\pi(\mathfrak{T})$ ist die Calkin-Algera, welche isomorph zu $C(S^1)$ ist. Dadurch erhalten wir die kurze exakte Sequenz

$$0 \to \mathfrak{k}(H^2(S^1)) \to \mathfrak{T} \to C(S^1) \to 0.$$

Diese heißt Toeplitz-Erweiterung.

Grundlegend für das Bott-Periodizität-Theorem ist der so genannte Bott-Generator.

Definition 2.7.4 [HR00, S. 94, Ex. 4.3.10] Es sei $\mathbb{D}$ die Einheitskreisscheibe in $\mathbb{C}$. Ferner sei $A = C(\bar{\mathbb{D}})$ und $J = C_0(\mathbb{D})$ das Ideal der stetigen Funktionen, die auf dem Rand $\partial\mathbb{D}$ verschwinden. Hierbei bezeichne $\bar{\mathbb{D}}$ den Abschluss von $\mathbb{D}$. Dann ist $A/J = C(\partial\mathbb{D})$. Sei $z\colon \bar{\mathbb{D}} \to \mathbb{C}$ die als ein Element von A aufgefasste Inklusionsabbildung. Dann definiert das Tripel $(1, 1, \bar{z})$ einen relativen K-Zykel für $(C(\bar{\mathbb{D}}), C(\partial\mathbb{D}))$ und durch die Ausschneidung eine K-Theorie-Klasse in $K_0(C_0(\mathbb{D}))$.
Da $\mathbb{D}$ homöomorph zur Ebene $\mathbb{R}^2$ ist, können wir die Klasse auch als Element in $K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ definieren. Das so gewonnene Element heißt Bott-Generator.

Bemerkung 2.7.5 Nach Definition ist

$$K_0(C_0(\mathbb{R}^2)) = K_1(C_0(\mathbb{R})) = K_1(C(S^1)),$$

wobei wir die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{R}$ mit dem Einheitskreis, der durch die Cayley-Transformation gegeben ist, identifizieren. In diesem Fall stimmt der Bott-Generator mit der K_1-Klasse der Funktion $z \mapsto \bar{z}$ auf $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ überein.

Es sei $b \in K_2(\mathbb{C}) = K_0(C_0(\mathbb{R}^2))$ der Bott-Generator. Durch Bildung des äußeren Produkts mit b erhalten wir für jede C^*-Algebra A eine natürliche Abbildung

$$\beta_A\colon K_0(A) \to K_2(A).$$

Das Bott-Periodizität-Theorem sagt aus, dass diese Abbildung stets ein Isomorphismus ist. Zuerst machen wir jedoch folgende Bemerkung.

Bevor wir den Beweis des Bott-Periodizitäts-Theorems angeben können, definieren wir zunächst einen Kandidaten für das Inverse der Bott-Abbildung. Sei dazu

$$0 \to \mathfrak{k}(H) \to \mathfrak{T} \to C(S^1) \to 0$$

die Toeplitz-Erweiterung. Dann erhalten wir folgende exakte Sequenz:

$$0 \to \mathfrak{k}(H) \otimes A \to \mathfrak{T} \otimes A \to C(S^1) \otimes A \to 0.$$

Bezüglich dieser kurzen exakten Sequenz erhalten wir eine Randabbildung

$$\partial\colon K_1(C(S^1)\otimes A) \to K_0(\Bbbk(H)\otimes A) \cong K_0(A).$$

Schränken wir diese nun auf $C_0(\mathbb{R})\otimes A \subseteq C(S^1)\otimes A$ ein, so erhalten wir

$$\alpha_A\colon K_2(A) = K_1(C_0(\mathbb{R})\otimes A) \to K_0(A).$$

Wir werden nun zeigen, dass α_A invers zu β_A ist, und damit das Bott-Periodizitäts-Theorem beweisen.
Der ursprüngliche Beweis von Atiyah hängt von zwei formalen Eigenschaften des Homomorphismus α_A ab, der für alle C^*-Algebren definiert ist:

(i) Für $A = \mathbb{C}$ ist $\alpha_{\mathbb{C}}(b) = 1 \in K_0(\mathbb{C})$, wobei b den Bott-Generator bezeichne.
(ii) Das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
K_2(A)\otimes K_0(B) \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_A\otimes 1"'] & K_2(A\otimes B) \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B}"] \\
K_0(A)\otimes K_0(B) \arrow[r] & K_0(A\otimes B)
\end{tikzcd}$$

kommutiert für beliebige A und B. Dabei sind die horizontalen Pfeile durch das K-Theorie-Produkt gegeben.

Der zuvor definierte Homomorphismus α_A erfüllt diese Eigenschaften und das gewünschte Ergebnis folgt unter Verwendung des Toeplitz-Index-Theorems.

Satz 2.7.6 (Bott-Periodizität-Theorem) *[HR00, S. 110 f., Th. 4.9.1] Für jede beliebige C^*-Algebra A ist die Bott-Abbildung*

$$\beta_A\colon K_0(A) \to K_2(A)$$

ein Isomorphismus.

Beweisskizze: Zunächst zeigt man, dass α ein Linksinverses der Bott-Abbildung liefert. Für $A = \mathbb{C}$ ist dies gerade durch die Eigenschaft (i) gegeben. Der allgemeine Fall folgt unter Verwendung der Linearität von $\alpha_{\mathbb{C}}$:

$$\alpha_A(\beta_A(x)) = \alpha_{\mathbb{C}}(b\times x) = \alpha_{\mathbb{C}}(b)\times x = 1\times x = x.$$

Damit ist die Injektivität der Bott-Abbildung gezeigt. Um den Beweis zu beenden, muss man noch die Surjektivität zeigen. Nach Proposition 2.6.7 reicht es, nachzuweisen, dass jedes Element $y \in K_0(A\otimes C_0(\mathbb{R}^2))$ von der Form $x\times b$ für ein geeignetes $x \in K_0(A)$ ist.
Dafür benötigt man die beiden Isomorphismen

$$\sigma\colon A\otimes C_0(\mathbb{R}^2) \to C_0(\mathbb{R}^2)\otimes A$$

und

$$\tau\colon C_0(\mathbb{R}^2)\otimes A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)\to C_0(\mathbb{R}^2)\otimes A\otimes C_0(\mathbb{R}^2).$$

Diese vertauschen jeweils den ersten und letzten Faktor der entsprechenden Tensorprodukte.
Durch die Eigenschaften des Tensorprodukts erhalten wir außerdem

$$\tau_*(b\times y)=\sigma_*(y)\times b$$

Die zielführende Beobachtung ist, dass τ_* die Identität ist. Um dies zu sehen, bemerkt man zunächst, dass τ_* der Homomorphismus auf der K-Theorie ist, der durch Rotation des $\mathbb{R}^4=\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$ durch die 4×4-Matrix

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

induziert wird. Diese Matrix hat die Determinante $+1$ und ist in $SO(4)$ homotop zur Identität. Da die K-Theorie homotopieinvariant ist, folgt das Resultat.
Nutzt man nun die Tatsache, dass $\alpha_{A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)}$ linksinvers zu $\beta_{A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)}$ ist, so kann man

$$y=\alpha_{A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)}(b\times y)=\alpha_{A\otimes C_0(\mathbb{R}^2)}(\sigma_*(y)\times b)=\alpha_A(\sigma_*(y))\times b$$

schreiben. Deshalb ist y von der Form $x\times b$, was das Bott-Periodizitäts-Theorem beweist.

□

Das Bott-Periodizität-Theorem ermöglicht es uns nun, die K-Theorie-Gruppen $K_0(A)$ und $K_2(A)$ miteinander zu identifizieren.
Wir betrachten dazu eine Erweiterung

$$0\to J\to A\to A/J\to 0,$$

womit wir die sechs-termige exakte Sequenz

(2.7.1)
$$\begin{tikzcd} K_1(J) \arrow[r] & K_1(A) \arrow[r] & K_1(A/J) \arrow[d] \\ K_0(A/J) \arrow[u] & K_0(A) \arrow[l] & K_0(J) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

erhalten.

3 Grobe Geometrie

Bei der groben Geometrie handelt es sich um ein verhältnismäßig junges Teilgebiet der Geometrie. Geprägt wurde und wird sie vor allem von den Mathematikern John Roe (*1959) und Nigel Higson (*1963).

Die grobe Geometrie entstand aus dem Wunsch heraus, den Atiyah-Singer-Index-Satz zu verallgemeinern, da es sich hierbei um ein sehr mächtiges und nützliches Werkzeug in vielen Bereichen der Mathematik handelt. Es verbindet Differentialgeometrie, die Theorie der partiellen Differentialgleichungen, Differentialtopologie und Operatoralgebren, in seiner Aussage, dass der topologische Index eines elliptischen Differentialoperators unter gewissen Voraussetzungen mit dem analytischen Index übereinstimmt.

Die Verallgemeinerung des Atiyah-Singer-Index-Satzes soll jedoch nicht Teil dieser Arbeit werden. Da die grobe Geometrie darüber hinaus auch die Grundlage für eine Vielzahl an weiteren Beweisen liefert, soll diese spezielle Art der Geometrie in diesem Kapitel vorgestellt werden. Dabei wird jedoch nur die Eigenschaften eingegangen, die in dieser Arbeit Anwendung finden. Weiterführende Informationen finden sich in [HR00].

3.1 Einführung

Die grundlegende Idee der groben Geometrie besteht darin, Räume nicht lokal, sondern global zu betrachten. Dabei werden zwei metrische Räume als grob äquivalent aufgefasst, wenn sie „aus großer Entfernung betrachtet"gleich aussehen ([BP]). Die Abbildung 3.1 verdeutlicht, weshalb der Raum $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen grob äquivalent zu $\mathbb{R}$ ist, wenn beide Räume mit der Standardmetrik ausgestattet sind. Je weiter man aus $\mathbb{Z}$ herauszoomt, desto weniger fallen die Abstände zwischen den Punkten auf, sodass der Unterschied zu $\mathbb{R}$ nicht mehr erkennbar ist.

Ähnlich kann man sich die grobe Äquivalenz von $\mathbb{R}^2$ zu $\mathbb{Z}^2$ vorstellen. Diese ist in Abbildung 3.2 dargestellt.

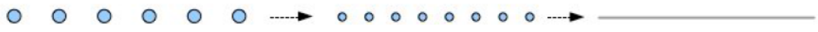

Abbildung 3.1: Grobe Äquivalenz von $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{R}$ ([BP])

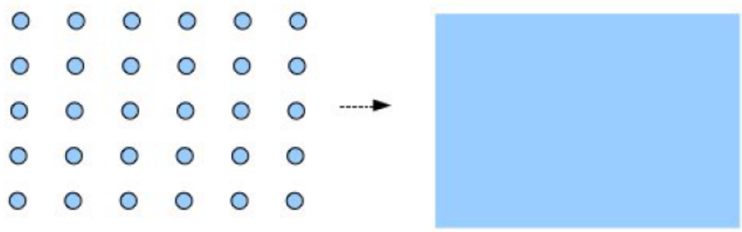

Abbildung 3.2: Grobe Äquivalenz von $\mathbb{Z}^2$ zu $\mathbb{R}^2$ ([BP])

Wie wir im Folgenden sehen werden, sind zudem kompakte metrische Räume stets grob äquivalent zu einem Punkt.

Wir wollen zunächst die grobe Geometrie mathematisch einführen und definieren. Dafür erinnern wir an die Definition zweier zueinander homotoper $*$-Homomorphismen:

Erinnerung 3.1.1 A und B seien zwei C^*-Algebren und $\varphi_1, \varphi_2 \colon A \to B$ seien zwei $*$-Homomorphismen zwischen A und B. Dann heißen φ_1 und φ_2 homotop, wenn sie durch eine stetige Familie von $*$-Homomorphismen $H \colon A \times [0,1] \to B$ verbunden werden können. Wie üblich schreiben wir für festes $t \in [0,1]$ auch $H_t \colon A \to B$.

Im vorherigen Kapitel haben wir in Satz 2.5.7 gesehen, dass der K-Theorie-Funktor homotopieinvariant ist, das heißt, dass zwei homotope $*$-Homomorphismen den gleichen Homomorphismus $K_p(A) \to K_p(B)$ definieren.

Bevor wir mit den Definitionen einer groben Abbildung, einer groben Homotopie und eines groben Raums tiefer in die grobe Geometrie einsteigen können, benötigen wir zunächst die Definition folgender Äquivalenzrelation:

Definition 3.1.2 [HR00, S. 142 f., Def. 6.1.1] Es seien (X, d) ein metrischer Raum und S eine beliebige Menge. Zwei Abbildungen $\alpha, \beta \colon S \to X$ heißen geschlossen (zueinander), falls

$$\sup_{s \in S} \mathrm{d}(\alpha(s), \beta(s)) < \infty,$$

das heißt, wenn ihr Abstand in jedem Punkt kontrollierbar ist.

Bemerkung 3.1.3 (i) Geschlossenheit ist eine Äquivalenzrelation.

Beweis: Aufgrund der Symmetrie-Eigenschaft der Metrik ist auch die Geschlossenheit symmetrisch. Die Transitivität folgt aus der Dreiecksungleichung der Metrik und der Endlichkeit der Summe zweier endlicher Zahlen. Die Reflexivität ist klar.

□

(ii) Hat X einen endlichen Durchmesser, sind zwei beliebige Abbildungen stets geschlossen.

Mit diesen Gegebenheiten können wir nun eine grobe Struktur auf X definieren:

Definition 3.1.4 (Grobe Struktur) [HR00, S. 142, Def. 6.1.2] Gegeben sei eine Menge X. Eine grobe Struktur auf X ist für jede Menge S eine Äquivalenzrelation auf der Menge aller Abbildungen von S nach X mit folgenden Eigenschaften:

(i) Sind $\alpha, \beta \colon S \to X$ geschlossen und ist $p \colon S' \to S$ eine beliebige Abbildung, so sind auch $\alpha \circ p$ und $\beta \circ p$ geschlossen.
(ii) Ist $S = S' \cup S''$ und sind $\alpha, \beta \colon S \to X$ zwei Abbildungen, sodass die Einschränkungen $\alpha_{|S'}$, $\alpha_{|S''}$, $\beta_{|S'}$ und $\beta_{|S''}$ geschlossen sind, so sind auch α und β geschlossen.
(iii) Sind α und β konstante Abbildungen, so sind sie geschlossen.

Eine Menge X versehen mit einer groben Struktur bezeichnen wir als groben Raum.

Definition 3.1.5 [HR00, S. 142, Def. 6.1.3] Es seien X ein grober Raum und S sei eine Teilmenge von $X \times X$. Dann heißt S kontrollierbar, wenn die Koordinatenabbildungen

$$\pi_1, \pi_2 \colon S \subset X \times X \to X,$$
$$\pi_1(x,y) = x \text{ und } \pi_2(x,y) = y$$

geschlossen zueinander sind.
Eine Menge U von Teilmengen $U_i \subset X$ heißt uniform beschränkt, wenn

$$\bigcup_{U_i \in U} U_i \times U_i$$

kontrollierbar ist.

Zwischen der groben Struktur auf X und den kontrollierbaren Mengen gibt es folgenden Zusammenhang:

Lemma 3.1.6 *[HR00, S. 142, Def. 6.1.4] Es sei X ein grober Raum. Zwei Abbildungen $p_1, p_2 \colon S \to X$ sind genau dann geschlossen, wenn das Bild von $p := (p_1, p_2) \colon S \to X \times X$ kontrollierbar ist.*

Beweis: Es seien p_1 und p_2 geschlossen. Wähle $r\colon \operatorname{Im} p \to S$ so, dass $p \circ r = \mathrm{Id}_{\operatorname{Im} p}$. Dann sind $p_1 \circ r$ und $p_2 \circ r$ geschlossen. Da andererseits aber

$$p_i \circ r = \pi_i \circ p \circ r = \pi_i$$

gilt, sind π_1 und π_2 geschlossen auf $\operatorname{Im} p$ und das Bild ist demnach kontrollierbar.
Die andere Richtung folgt aus den Eigenschaften der groben Struktur, genauer aus Eigenschaft (i) in Definition 3.1.4. □

Definition 3.1.7 [HR00, S. 142, Def. 6.1.5] Eine Teilmenge $B \subset X$ eines groben Raums X heißt beschränkt, wenn die ein-elementige Familie $\{B\}$ uniform beschränkt ist, das heißt, wenn $B \times B$ kontrollierbar ist.

Lemma 3.1.8 *[HR00, S. 143, Lem. 6.1.6] Es seien X ein grober Raum und $\emptyset \neq B \subset X$. Dann ist B genau dann beschränkt, wenn die Inklusion $i\colon B \to X$ geschlossen zu einer (und damit zu allen) konstanten Abbildung ist.*

Beweis: Es sei B beschränkt. Dann sind die Projektionsabbildungen

$$\pi_1, \pi_2\colon B \times B \to X$$

geschlossen. Wir wählen eine Abbildung $j\colon B \to B \times B$ so, dass $\pi_1 \circ j$ der Inklusionsabbildung entspricht und $\pi_2 \circ j$ konstant ist. Aus Eigenschaft (i) in Definition 3.1.4 folgt, dass die Inklusionsabbildung geschlossen zu einer konstanten Abbildung ist.
Es sei nun die Inklusionsabbildung $i\colon B \to X$ geschlossen zu einer konstanten Abbildung. Da $\pi_1\colon B \times B \to X$ durch die Inklusionsabbildung faktorisiert werden kann, ist auch π_1 geschlossen zu einer konstanten Abbildung. Auf die gleiche Weise erhalten wir die Geschlossenheit von π_2 zu einer konstanten Abbildung. Demnach sind wegen Eigenschaft (iii) auch π_1 und π_2 geschlossen. □

Wir werden oft fordern, dass ein grober Raum X mit einer lokal kompakten Topologie ausgestattet ist, also dass für jedes $x \in X$ jede Umgebung von x eine kompakte Umgebung enthält. Um eine Art Kompatibilität zwischen der groben Struktur und der Topologie herzustellen, wird zudem noch der Begriff einer eigentlichen groben Struktur eingeführt:

Definition 3.1.9 [HR00, S. 143, Def. 6.1.7] Es sei X ein lokal kompakter Raum. Eine grobe Struktur auf X heißt eigentlich, wenn gilt:

(i) X hat eine uniform beschränkte Überdeckung.
(ii) Jede beschränkte Teilmenge von X hat einen kompakten Abschluss.

Bemerkung 3.1.10 [HR00, S. 143, Rem. 6.1.8] Aus den zuvor genannten Eigenschaften folgt, dass die beschränkten Teilmengen von X gerade diejenigen sind, die einen kompakten Abschluss haben.

Definition 3.1.11 [HR00, S. 144, Def. 6.1.11] Ein grober Raum X heißt separabel, wenn er eine abzählbare und uniform beschränkte Überdeckung hat.

Auch metrische und topologische Räume können wir mit einer groben Struktur ausstatten:

Beispiel 3.1.12 (Metrische grobe Struktur) [HR00, S. 143, Ex. 6.1.9] Es sei X ein metrischer Raum. Dann erhalten wir unter Verwendung von Definition 3.1.4 eine grobe Struktur auf X, die wir die metrische grobe Struktur nennen. Diese ist eigentlich, wenn X eigentlich ist, das heißt, wenn geschlossene Bälle in X kompakt sind.

Beispiel 3.1.13 (Topologische grobe Struktur) [HR00, S. 143, Ex. 6.1.10] Gegeben sei ein lokal kompakter Hausdorff-Raum X, der mit einer metrifizierbaren Kompaktifizierung ausgestattet ist. Das ist ein kompakter, metrifizierbarer Raum $\bar{X}$, der X als eine offene dichte Teilmenge enthält. Wie üblich bezeichne $\partial X = \bar{X} \setminus X$ den Rand von X.
Wir definieren nun die grobe Struktur wie folgt: Zwei Abbildungen $p_1, p_2 \colon S \to X$ heißen geschlossen (zueinander), wenn für jede Folge $\{s_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset S$ die beiden Folgen $\{p_1(s_n)\}$ und $\{p_2(s_n)\}$ gegen den gleichen Randpunkt in ∂X konvergieren. Die so gewonnene Struktur heißt die topologische grobe Struktur bezüglich der gegebenen Kompaktifizierung.

Mithilfe der zuvor genannten Eigenschaften eines groben Raumes können wir nun eine grobe Abbildung definieren:

Definition 3.1.14 [HR00, S. 144, Def. 6.1.14] Eine Funktion $f \colon X_1 \to X_2$ zwischen zwei groben Räumen X_1 und X_2 heißt grobe Abbildung, wenn gilt:

(i) Sind p_1 und p_2 grobe Abbildungen nach X_1, so sind die Verkettungen $f \circ p_1$ und $f \circ p_2$ geschlossene Abbildungen nach X_2.

(ii) f ist eigentlich in dem Sinn, dass die Urbildmenge $f^{-1}(B)$ für jede beschränkte Teilmenge $B \subset X_2$ beschränkt in X_1 ist.

Definition 3.1.15 [HR00, S. 145, Def. 6.1.17] Zwei grobe Räume X_1 und X_2 heißen grob äquivalent, wenn es zwei grobe Abbildungen $p \colon X_1 \to X_2$ und $q \colon X_2 \to X_1$ gibt, sodass $p \circ q$ und $q \circ p$ geschlossen zur Identität auf X_1 beziehungsweise X_2 sind. p heißt dann grobe Äquivalenz.

Diesen Abschnitt abschließend, wollen wir noch einmal die Funktorialität von K_0 aus Bemerkung 2.1.14 umformulieren und beweisen.

Lemma 3.1.16 *[Roe96, S. 19, Lem. 3.5] Es sei $f\colon X \to Y$ eine grobe Abbildung zwischen zwei groben Räumen X und Y. Dann induziert f einen funktorialen Homomorphismus*

$$f_*\colon K_p(C^*(X)) \to K_p(C^*(Y)).$$

Darüber hinaus induzieren grob äquivalente Abbildungen den gleichen Homomorphismus.

Beweis: Es seien X und Y auf H_X und H_Y dargestellt. Wir sagen, dass eine Isometrie $V\colon H_X \to H_Y$ die Abbildung f überdeckt, wenn es eine Konstante $R > 0$ gibt, sodass

$$\varphi V \psi = 0\colon H_X \to H_Y$$

für $\psi \in C_0(X)$, $\varphi \in C_0(Y)$ und $\mathrm{d}(\operatorname{supp}(\varphi), f\operatorname{supp}(\psi)) > R$ gilt.[1)] Wir können nun H_Y so wählen, dass es eine Isometrie gibt, die jede grobe Abbildung überdeckt. Dies sehen wir wie folgt:
Aus dem Spektralsatz der Funktionalanalysis folgt, dass jede Zerlegung von X oder Y in Borelmengen auf eine Zerlegung von H_X oder H_Y in eine direkte Summe führt. Zerlegen wir nun Y in Borelmengen der gleichen Größe, deren Inneres nicht leer ist, so erhalten wir eine Zerlegung von H_Y als direkte Summe unendlich-dimensionaler Summanden. Betrachten wir nun die inverse Zerlegung auf X und bilden jeden Summanden von H_X isometrisch auf den entsprechenden Summanden von H_Y ab, so erhalten wir die gewünschhte Isometrie V.
Wir haben also gesehen, dass es eine Isometrie V gibt, die jede grobe Abbildung überdeckt. Damit können wir den Homomorphismus von $C^*(X)$ nach $C^*(Y)$, der durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} \mathrm{Ad}_V\colon \mathfrak{B}(H_X) &\to \mathfrak{B}(H_Y) \\ T &\mapsto VTV^* \end{aligned}$$

gegeben ist, betrachten. Es sei nun f_* die Abbildung auf der K-Theorie, die von ebendieser Abbildung induziert wird. Diese ist unabhängig von der Wahl von V.
Der Nachsatz des Lemmas folgt nun, da V auch jede zu f grob äquivalente Abbildung überdeckt, wenn es f überdeckt. □

3.2 Grobe Geometrie auf Kegeln

Ebenso wie wir in Kapitel 2.4 eine Verbindung zwischen Kegeln und K-Theorie-Gruppen mittels exakter Sequenzen hergestellt haben, wollen wir nun den Zusammenhang zwischen C^*-Algebren und Kegeln beleuchten.

[1)]Überdeckende Abbildungen werden in Definition 3.3.7 ausführlicher eingeführt.

Die positiven Elemente einer C^*-Algebra bilden einen Kegel. Daher sollen in diesem Kapitel die grobe Struktur auf Kegeln eingeführt und einige nützliche Eigenschaften vorgestellt werden.

Definition 3.2.1 [HR00, S. 145] Es sei Y ein kompakter metrifizierbarer Raum. Der abgeschlossene Kegel auf Y ist definiert als der kompakte Raum $\mathcal{C}Y$, den man aus $[0,1]\times Y$ erhält, wenn man $\{0\}\times Y$ in einen Punkt zusammenzieht.
Analog erhält man den offenen Kegel $\mathcal{O}Y$ auf Y aus $[0,1)\times Y$ durch Zusammenziehen von $\{0\}\times Y$ in einen Punkt.

Bemerkung 3.2.2 [HR00, S. 145] $\mathcal{O}Y$ ist eine dichte offene Teilmenge des kompakten Raums $\mathcal{C}Y$, der - aufgefasst als Kompaktifizierung von $\mathcal{O}Y$ - eine topologische grobe Struktur auf $\mathcal{O}Y$ induziert. In diesem Fall schreiben wir $\mathcal{O}_c Y$.
Wir können $\mathcal{O}Y$ auch mit einer metrischen groben Struktur versehen: Dazu betrachten wir Y als kompakte Teilmenge der Einheitskugel in einem reellen Hilbertraum E. Es sei außerdem $\varphi\colon [0,1)\to[0,\infty)$ ein Homöomorphismus. Dann können wir $\mathcal{O}Y$ unter Verwendung der Abbildung

$$\begin{aligned}\mathcal{O}E &\to E,\\ (t,y) &\mapsto \varphi(t)y\end{aligned}$$

mit einer bestimmten Teilmenge des metrischen Raumes[2)] E identifizieren und erhalten auf diese Weise eine Metrik d_φ auf $\mathcal{O}Y$. In diesem Fall schreiben wir $\mathcal{O}_\varphi Y$ für den offenen Kegel mit der metrischen groben Struktur. Dabei hängt die Struktur von der Wahl des Homöomorphismus ab.
Da Y kompakt ist, ist die metrische grobe Struktur eigentlich.

Proposition 3.2.3 *[HR00, S. 145 f., Prop. 6.2.1] Es sei Y eine kompakte Teilmenge des Einheitsballs eines Hilbertraums E. Dann gilt:*

(i) Für jeden Homöomorphismus $\varphi\colon [0,1)\to[0,\infty)$ ist jede Menge, die für $\mathcal{O}_\varphi Y$ kontrollierbar ist, auch für $\mathcal{O}_c Y$ kontrollierbar.

(ii) Für jede kontrollierbare Menge für $\mathcal{O}_c Y$ gibt es einen Homöomorphismus

$$\varphi\colon [0,1)\to[0,\infty),$$

für den die Menge auch für $\mathcal{O}_\varphi Y$ kontrollierbar ist.

Somit ist die grobe Struktur $\mathcal{O}_c Y$ die kleinste obere Schranke der groben Strukturen $\mathcal{O}_\varphi Y$. Dabei durchlaufe φ die Menge aller Homöomorphismen $[0,1)\to[0,\infty]$.

Für den Beweis von Proposition 3.2.3 sei auf [HR00, S. 146 f.] verwiesen.

Bemerkung 3.2.4 [HR00, S. 147, Rem. 6.2.3] Die partiell geordnete Menge der groben Strukturen $\mathcal{O}_\varphi Y$ ist gerichtet, das heißt, dass jeweils zwei Elemente eine gemeinsame obere Schranke besitzen.

[2)]Genauer ist E die Menge aller Strahlen durch den Ursprung, die einen Punkt von Y treffen.

3.3 Die C^*-Algebra von groben Räumen

Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit C^*-Algebren von groben Räumen betrachtet werden, sollen diese nun eingeführt werden.
Dabei gehen wir von einem lokal kompakten, separablen, metrifizierbaren Raum X aus, der mit einer eigentlichen groben Struktur ausgestattet ist. Die metrische Struktur wird sich zumeist unter Verwendung der metrifizierbaren Kompaktifizierung ergeben.

$C_0(X)$ habe eine nicht-entartete Darstellung $\rho\colon C_0(X) \to \mathfrak{B}(H)$ auf einem separablen Hilbertraum H.

Definition 3.3.1 [HR00, S. 147, Def. 6.3.1] Es sei $v \in H$ und H wie oben. Der Träger $\operatorname{supp}(v)$ von v ist das Komplement der Vereinigung aller offener Teilmengen $U \subset X$ mit

$$\rho(f)v = 0 \text{ für alle } f \in C_0(U)$$

in X, das heißt

$$\operatorname{supp} V = \{U \subset X : \rho(f)v = 0 \text{ für alle } f \in C_0(U)\}.$$

Definition 3.3.2 [HR00, S. 147, Def. 6.3.2] Ein Operator $T \in \mathfrak{B}(H)$ heißt lokal kompakt auf X, wenn sowohl fT als auch Tf für alle Funktionen $f \in C_0(X)$ kompakte Operatoren definieren.

Für einen solchen Operator T definieren wir nun den Träger wie folgt:

Definition 3.3.3 [HR00, S. 147, Def. 6.3.3] Es sei $T \in \mathfrak{B}(H)$. Dann ist der Träger von T das Komplement der Vereinigung aller offener Teilmengen $U \times V \subset X \times X$ mit

$$\rho(f)T\rho(g) = 0 \text{ für alle } f \in C_0(U), g \in C_0(V)$$

in $X \times X$.

Bemerkung 3.3.4 [HR00, S. 147, Def. 6.3.3] Die Definition des Trägers kann man auch wie folgt verallgemeinern:
Die Räume $C_0(X)$ und $C_0(Y)$ seien durch ρ_X und ρ_Y auf Hilberträumen H_X und H_Y dargestellt. Dann ist der Träger eines beschränkten Operators $T\colon H_X \to H_Y$ das Komplement der Vereinigung aller offener Mengen $U \times V \subseteq Y \times X$ mit

$$\rho_Y(f)T\rho_X(g) = 0 \text{ für alle } f \in C_0(U), g \in C_0(V)$$

in $Y \times X$.

Definition 3.3.5 [HR00, S. 147, Def. 6.3.5] Es sei X ein separabler grober Raum, dessen grobe Struktur eigentlich ist. Ferner habe $C_0(X)$ eine nicht-entartete Darstellung auf einem Hilbertraum H. Dann heißt ein Operator $T \in \mathfrak{B}(H)$ kontrollierbar, falls $\operatorname{supp}(T)$ als Teilmenge von $X \times X$ kontrollierbar ist.

Mit diesen Vorüberlegungen und Definitionen können wir nun die C^*-Algebra definieren:

Definition 3.3.6 [HR00, S. 149, Def. 6.3.8] Es sei X ein separabler grober Raum, der mit einer eigentlichen groben Struktur ausgestattet ist. Ferner sei $\rho\colon C_0(X) \to \mathfrak{B}(H_X)$ eine nicht-degenerierte Darstellung. Dann ist die C^*-Algebra $C^*_\rho(X)$ der Abschluss der Algebra aller lokal kompakten, kontrollierbaren Operatoren auf H_X.

Definition 3.3.7 [HR00, S. 149, Def. 6.3.9] Es seien X und Y eigentliche grobe Räume und $C_0(X)$ und $C_0(Y)$ seien nicht-entartete Darstellungen auf Hilberträumen H_X und H_Y. Ferner sei $q\colon X \to Y$ eine grobe Abbildung. Wir sagen, ein beschränkter Operator $V\colon H_X \to H_Y$ überdeckt q, wenn die Abbildungen π_1 und $q \circ \pi_2$ von $\operatorname{supp}(V) \subset Y \times X$ nach Y geschlossen sind.

Bemerkung 3.3.8 Da Geschlossenheit eine Äquivalenzrelation definiert, überdeckt jede Abbildung S, die q überdeckt, auch jede zu q geschlossene Abbildung.

Wir können Definition 3.3.7 auf Isometrien wie folgt ausweiten:

Definition 3.3.9 [HR00, S. 127, Def. 5.2.2] Es seien A und B zwei separable und unitale C^*-Algebren mit amplen Darstellungen ρ_A und ρ_B auf separablen Hilberträumen H_A und H_B. Außerdem sei $\alpha\colon A \to B$ ein unitaler $*$-Homomorphismus.
Wir sagen, eine Isometrie $V\colon H_A \to H_B$ überdeckt α, wenn für jedes $a \in A$ die Äquivalenz

$$V^* \rho_A(A) V \sim \rho_B(\alpha(a))$$

modulo kompakter Operatoren erfüllt ist.

Ohne Beweis geben wir folgende Aussagen an:

Lemma 3.3.10 *[HR00, S. 149, Lem. 6.3.11] Es seien X und Y zwei eigentliche separable grobe Räume und $C_0(X)$ und $C_0(Y)$ nicht-entartet auf H_X und H_Y dargestellt. Wie zuvor sei $q\colon X \to Y$ eine grobe Abbildung. Ist $V\colon H_X \to H_Y$ eine Isometrie, die q überdeckt, so bildet der $*$-Homomorphismus $Ad_V(T) = VTV^*$ die C^*-Algebra $C^*(X)$ auf $C^*(Y)$ ab.*

Proposition 3.3.11 *[HR00, S. 150, Prop. 6.3.12] Es seien X und Y eigentliche separable grobe Räume. Außerdem seien $C_0(X)$ und $C_0(Y)$ ampel auf Hilberträumen H_X und H_Y dargestellt. Dann wird jede grobe Abbildung $q\colon X \to Y$ durch eine Isometrie von H_X nach H_Y überdeckt, und zwei solche q überdeckenden Isometrien induzieren die gleiche Abbildung auf der K-Theorie, das heißt*

$$(Ad_{V_1})_* = (Ad_{V_2})_*\colon K_p(C^*(X)) \to K_p(C^*(Y))$$

Wählen wir nun in Proposition 3.3.11 $q = \mathrm{id}$, so erhalten wir folgende Aussage in der K-Theorie:

Korollar 3.3.12 *[HR00, S. 150, Cor. 6.3.13] Es sei X ein eigentlicher separabler grober Raum und es seien ρ und ρ' zwei ample Darstellungen von $C_0(X)$. Dann sind die K-Theorie-Gruppen $K_p(C^*_\rho(X))$ und $K_p(C^*_{\rho'}(X))$ isomorph.*

3.4 Die K-Theorie von metrischen groben Strukturen

Ziel dieses Abschnitts ist es, $K_p(C^*(X))$ für bestimmte metrische grobe Strukturen auf X zu berechnen.

Lemma 3.4.1 *[HR00, S. 152, Lem. 6.4.1] Gegeben sei ein eigentlicher separabler grober Raum X, der außerdem kompakt ist. Dann ist*

$$K_p(C^*(X)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{falls } p = 0 \\ 0 & \text{falls } p = 1 \end{cases}$$

Beweis: Da X kompakt ist, ist jeder Operator auf X kontrollierbar. Daher ist $C^*(X) = \mathfrak{k}(H_x)$, womit das Resultat folgt. □

Im Folgenden sei X ein eigentlicher metrischer Raum. Insbesondere ist X also ein eigentlicher separabler grober Raum. Zur vereinfachten Beschreibung der metrischen groben Strukturen führen wir das numerische Maß der Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Operators ein:

Definition 3.4.2 [HR00, S. 152] Es sei T ein Operator auf H_X. Dann ist die Ausbreitungsgeschwindigkeit von T gegeben durch

$$\mathrm{prop}(T) = \sup\{\mathrm{d}(x,y) : (x,y) \in \mathrm{supp}(T)\}.$$

Die bezüglich der gegebenen Metrik kontrollierbaren Operatoren auf H_X sind demnach jene mit endlicher Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Im Folgenden wollen wir die K-Theorie für den Strahl $\mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ angeben:

Lemma 3.4.3 *[HR00, S. 152, Lem. 6.4.2] Für $p \in \{0,1\}$ ist*

$$K_p(C^*(\mathbb{R}^+)) = 0,$$

wobei wir die euklidische Metrik und die daraus entstehende metrische grobe Struktur betrachten.

Beweis: Es sei $\rho\colon C_0(X) \to \mathcal{L}(H)$ eine Darstellung von $C_0(\mathbb{R}^+)$ auf dem Hilbertraum $H = L^2(\mathbb{R}^+)$, die durch die Operatormultiplikation gegeben ist. Sei $H' = H \oplus H \oplus H \oplus \dots$ die direkte Summe unendlich vieler Kopien von H mit der induzierten Darstellung $\rho'\colon C_0(X) \to \mathcal{L}(H')$. Ferner sei V die Inklusion von H als erster Summand in H', das heißt

$$V\colon H \to H', f \mapsto (f, 0, 0, \dots).$$

Dann bildet V^* den Hilbertraum H' auf H ab und sowohl ρ als auch ρ' sind ampel. Nach ihrer Definition überdeckt V die Identität, wenn

$$V^* \rho V = \rho'.$$

Wir wählen also V_1 und V_2 so, dass

$$V_1^* \rho V_1 = \rho' \text{ und } V_2^* \rho' V_2 = \rho.$$

Dann ist $\mathrm{Ad}_{V_1} \mathrm{Ad}_{V_2} \rho' = \rho'$. Dies ist äquivalent zu $\mathrm{Ad}_{V_1} \mathrm{Ad}_{V_2} = \mathrm{id}$. Also überdeckt auch V als Verkettung von V_1 und V_2 die Identität. Aus Proposition 3.3.11 folgt nun, dass der $*$-Homomorphismus $\alpha_1 = \mathrm{Ad}_V$ einen Isomorphismus

$$\alpha_{1*}\colon K_p(C_\rho(\mathbb{R}^+)) \to K_p(C^*_{\rho'}(\mathbb{R}^+))$$

induziert. Um den Beweis zu beenden, müssen wir zeigen, dass dieser Isomorphismus der Nullabbildung entspricht, da daraus $K_p(C^*(\mathbb{R}^+)) = 0$ folgt.
Sei also $U\colon H \to H$ der Rechts-Shift, der durch die Formel

$$Uf(t) = \begin{cases} f(t-1) & \text{falls } t \geq 1 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

gegeben ist. Durch die Formel

$$\alpha_2(T) = 0 \oplus \mathrm{Ad}_U(T) \oplus \mathrm{Ad}_U^2(T) \oplus \dots$$

definieren wir nun einen weiteren $*$-Homomorphismus $\alpha_2\colon \mathfrak{B}(H) \to \mathfrak{B}(H')$. Dieser $*$-Homomorphismus besitzt zwei wesentliche Eigenschaften:

(i) Ist T metrisch kontrollierbar, so ist auch $\alpha_2(T)$ metrisch kontrollierbar, und

(ii) Ist T lokal kompakt, so ist auch $\alpha_2(T)$ lokal kompakt.

Aufgrund dieser Eigenschaften lässt sich α_2 zu einem $*$-Homomorphismus $C^*_\rho(\mathbb{R}^+) \to C^*_{\rho'}(\mathbb{R}^+)$ reduzieren. Bevor wir diese Überlegung weiter ausführen, wollen wir jedoch zunächst die Gültigkeit der beiden zuvor angegebenen Eigenschaften überprüfen:

zu (i) Der Träger von $\mathrm{Ad}_U(T)$ ist eine Verschiebung des Trägers von T, sodass T und $\mathrm{Ad}_U(T)$ die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der direkten Summe

$$\alpha_2(T) = 0 \oplus \mathrm{Ad}_U(T) \oplus \mathrm{Ad}_U^2(T) \oplus \ldots$$

entspricht dem Supremum der Ausbreitungsgeschwindigkeiten der einzelnen Summanden, und stimmt demnach ebenfalls mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von T überein.

zu (ii) Sei T lokal kompakt und f eine Funktion auf $\mathbb{R}^+$ mit kompaktem Träger. Dann gibt es eine natürliche Zahl N, sodass $\rho(f)U^n = 0$ für $n > N$. Daraus können wir ableiten, dass alle Summanden $\rho(f)\mathrm{Ad}_U^n(T)$ in der direkten Summe

$$\rho'(f)\alpha_2(T) = 0 \oplus \rho(f)\mathrm{Ad}_U(T) \oplus \rho(f)\mathrm{Ad}_U^2(T) \oplus \ldots$$

für $n > N$ verschwinden. Darüber hinaus sind sämtliche Summanden kompakt, da T lokal kompakt ist. Dadurch ist $\rho'(f)\alpha_2(T)$ kompakt für jede Funktion f auf $\mathbb{R}^+$ mit kompaktem Träger. Also ist $\alpha_2(T)$ lokal kompakt.

Wir betrachten nun die Isometrie $W\colon H' \to H'$, die durch die Vorschrift

$$\begin{aligned} W(f_1, f_2, \ldots) &= (0, Uf_1, Uf_2, \ldots) \\ &= (0, 0, f_1, f_2, \ldots) \end{aligned}$$

gegeben ist. Dann ist $\mathrm{Ad}_W = (0, f_2, U^* f_3, \ldots)$.
Betrachten wir nun die Summe $(\alpha_1 + \alpha_2)(T) = (T, \mathrm{Ad}_U(T), \mathrm{Ad}_U^2(T), \ldots)$, so ist

$$(\mathrm{Ad}_W \circ (\alpha_1 + \alpha_2))(T) = (0, \mathrm{Ad}_U(T), \mathrm{Ad}_U^2(T), \ldots) = \alpha_2(T),$$

das heißt,

$$\alpha_2 = \mathrm{Ad}_W \circ (\alpha_1 + \alpha_2).$$

W überdeckt die Identität und induziert deshalb nach Lemma 2.4.12 die Identität auf der K-Theorie. Durch ein Eilenberg Swindle erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha_{2*} &= (\mathrm{Ad}_W)_* \circ (\alpha_1 + \alpha_2)_* \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)_* = \alpha_{1*} + \alpha_{2*} \end{aligned}$$

und damit $\alpha_{1*} = 0$, was den Beweis abschließt. □

Mit Hilfe dieses Lemmas können wir nun die K-Theorie eines Raumes von der Form $\mathbb{R}^+ \times Y$ ausrechnen. Sei deshalb im Folgenden $X = \mathbb{R}^+ \times Y$ ausgesattet mit der Produktmetrik d_X, die durch

$$d_X((t,y),(t',y'))^2 = |t-t'|^2 + d_Y(y,y')^2$$

gegeben ist. Dann setzen wir $H = L^2(\mathbb{R}^+) \otimes H_Y$ und wie bereits im Beweis zuvor sei

$$H' = H \oplus H \oplus H \oplus \dots$$

Diese Hilberträume können mit einer amplen Darstellung von $C_0(X)$ versehen werden. Wir stellen uns H als Raum aller messbaren, quadratintegrierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^+ \to H_Y$ vor. Dabei meine quadratintegrierbar, dass das Integral

$$\int_0^\infty < f(t), f(t) >_{H_Y} \mathrm{d}t$$

endlich ist.
Wählt man nun die Isometrien U, V und W und die $*$-Homomorphismen α_1 und α_2 wie zuvor, so erhalten wir folgende Proposition:

Proposition 3.4.4 *[HR00, S. 154, Prop. 6.4.3] Es sei Y ein eigentlicher metrischer Raum und $X = \mathbb{R}^+ \times Y$, ausgestattet mit der Produktmetrik und der daraus resultierenden groben Struktur. Dann ist $K_p(C^*(X)) = 0$ für $p \in \{0,1\}$.*

Beweis: Wie bereits im Beweis zuvor sei

$$H = L^2(Y) = L^2([0,\infty) \times Y)$$

und ρ eine Darstellung von $C_0(X)$ auf H, die durch die Operatormultiplikation gegeben ist. Ferner sei $H' = H \oplus H \oplus \dots$ die direkte Summe unendlich vieler Kopien von H und ρ' die zugehörige Darstellung. V sei die Inklusion von H als ersten Summanden in H'. Dann folgt ebenso wie im Beweis zuvor, dass sowohl ρ als auch ρ' ampel sind, und dass V eine Isometrie ist, die die Identität überdeckt. Aus Proposition 3.3.11 folgt, dass der $*$-Homomorphismus $\alpha_1 = \mathrm{Ad}_V$ einen Isomorphismus

$$\alpha_{1*}\colon K_p(C^*_\rho(X))) \to K_p(C^*_{\rho'}(X))$$

induziert.
Wieder ist der Beweis beendet, wenn wir gezeigt haben, dass dieser Isomorphismus

der Nullabbildung entspricht.
Sei also $U\colon H \to H$ der Rechts-Shift, das heißt, U sei durch die Vorschrift

$$Uf(t) = \begin{cases} f(t-1) & \text{falls } t \geq 1 \\ 0 & \text{falls } 0 \leq t < 1 \end{cases}$$

gegeben. Wir erhalten nun einen $*$-Homomorphismus $\alpha_2\colon \mathfrak{B}(H) \to \mathfrak{B}(H')$ durch die Formel

$$\alpha_2(T) = 0 \oplus \mathrm{Ad}_U(T) \oplus \mathrm{Ad}_U^2(T) \oplus \dots$$

Dieser erfüllt wie zuvor zwei wesentliche Eigenschaften:

(i) Ist T metrisch kontrollierbar, so ist auch α_2 metrisch kontrollierbar.
(ii) Ist T lokal kompakt, so ist auch $\alpha_2(T)$ lokal kompakt.

Dadurch wird α_2 zu einem $*$-Homomorphismus zwischen $C^*_\rho(X)$ und $C^*_{\rho'}(X)$.
Die beiden zuvor gegebenen Eigenschaften wollen wir nun beweisen:

zu (i) Der Träger von $\mathrm{Ad}_U(T)$ ist die Translation des Trägers von T, und demnach haben T und $\mathrm{Ad}_U(T)$ die gleiche Ausbreitungsgeschwindigkeit. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der direkten Summe $\alpha_2(T)$ ist das Supremum der einzelnen Ausbreitungsgeschwindigkeiten und stimmt demnach mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit von T überein.

zu (ii) Sei T lokal kompakt, und f eine Funktion auf X mit kompaktem Träger. Dann gibt es eine ganze Zahl N, sodass $\rho(f)U^n = 0$ für alle $n > N$. Aus diesem Grund sind alle Summanden $\rho(f)\mathrm{Ad}_U^n(T)$ in der direkten Summe

$$\rho'(f)\alpha_2(T) = 0 \oplus \rho(f)\mathrm{Ad}_U(T) \oplus \rho(f)\mathrm{Ad}_U^2(T) \oplus \dots$$

für $n > N$. Darüber hinaus sind alle Summanden kompakt, da T lokal kompakt ist. Dadurch ist $\rho'(f)\alpha_2(T)$ für jede Funktion f auf X mit kompaktem Träger wiederum kompakt. Somit ist $\alpha_2(T)$ lokal kompakt.

Wie bereits im Beweis von Lemma 3.4.3 folgt

$$\alpha_2 = \mathrm{Ad}_W \circ (\alpha_1 + \alpha_2),$$

wobei $W\colon H' \to H'$ die Isometrie ist, die durch

$$W(f_1, f_2, \dots) = (0, Uf_1, Uf_2, \dots)$$

gegeben ist. W überdeckt die Identität und induziert demnach nach Lemma 2.4.12 die Identität auf der K-Theorie.
Betrachten wir nun die induzierten Abbildungen auf den K-Theorie-Klassen, so gilt

$$\begin{aligned} \alpha_{2*} &= (\mathrm{Ad}_w)_* \circ (\alpha_1 + \alpha_2)_* \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2)_* = \alpha_{1*} + \alpha_{2*}. \end{aligned}$$

Demnach ist $\alpha_{1*} = 0$. □

Ohne Beweis[3)] wollen wir nun noch die K-Theorie-Gruppen von $C^*(\mathbb{R}^n)$ wie folgt angeben.

Satz 3.4.5 *[HR00, S. 156, Th. 6.4.10] Die Gruppen $K_p(C^*(\mathbb{R}^n))$ sind durch*

$$K_p(C^*(\mathbb{R}^n)) = \begin{cases} \mathbb{Z} & falls\ p \equiv n (mod 2) \\ 0 & falls\ p \equiv n+1 (mod 2) \end{cases}$$

gegeben.

[3)]Der Beweis findet sich in [HR00, S. 156] und nutzt im Wesentlichen eine Mayer-Vietoris-Sequenz von Idealen, die sich aus der Unterteilung des $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^{n-1}$ und $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{n-1}$ ergeben.

4 K-Homologie

Die K-Homologie vereint die wichtigsten Ideen aus der algebraischen Geometrie, der Funktionalanalysis und der Geometrie. Damit ist sie sehr universell einsetzbar, um Theoreme aus verschiedensten Bereichen der Mathematik zu beweisen. Besonders im Bereich der Operatortheorie findet die K-Homologie vielfach Anwendung.

Entwickelt wurde die K-Homologie weitgehend unabhängig voneinander sowohl aus der Operatortheorie als auch aus der K-Theorie. Man kann die Korrelation K-Homologie $\leftrightarrow$ K-Theorie ähnlich wie den Zusammenhang zwischen Kohomologie- und Homologieklassen auffassen.

Für diese Arbeit ist die K-Homologie als Erweiterung der K-Theorie von fundamentaler Bedeutung. Daher soll sie in diesem Kapitel eingeführt werden.

4.1 Duale Algebren

Die K-Homologie basiert auf der Betrachtung der K-Theorie-Gruppen von dualen Algebren.

Definition 4.1.1 [HR00, S. 123, Def. 5.1.1] Es sei A eine separable, unitale C^*-Algebra und $\rho\colon A \to \mathfrak{B}(H)$ eine Darstellung von A auf einem separablen Hilbertraum. Dann ist

$$\mathfrak{D}_\rho(A) = \{T \in \mathfrak{B}(H) : [T, \rho(a)] \sim 0 \, \forall a \in A\}$$

die zu A duale Algebra bezüglich der Darstellung ρ. Dabei gilt $T_1 \sim T_2$ genau dann, wenn sich T_1 und T_2 nur durch einen kompakten Operator unterscheiden, und $[\cdot,\cdot]$ bezeichne den Kommutator.

Bemerkung 4.1.2 [HR00, S. 123] Wie wir gleich sehen werden, ist $\mathfrak{D}_\rho(A)$ unabhängig von der Wahl von ρ. Deshalb werden wir das ρ in der Notation oftmals weglassen.

Eine Projektion $P \in \mathfrak{D}(A)$ definiert eine Toeplitz-Erweiterung $\varphi_P \colon A \to \mathfrak{Q}(PH)$ durch die Formel

$$\varphi_P(a) = \pi(Pa).$$

Dabei bezeichne $\mathfrak{Q}(H) = \mathfrak{B}(H)/\mathfrak{k}(H)$ die Calkin-Algebra.

Wir erinnern an die Definition einer amplen Darstellung und einer amplen Projektion:

Erinnerung 4.1.3 [HR00, S. 124, Def. 5.1.3] Die Darstellung $\rho \colon A \to \mathfrak{B}(H)$ einer C^*-Algebra A heißt ampel, wenn sie nicht-entartet ist und wenn kein Nullelement in A auf H wie ein kompakter Operator wirkt. Eine Projektion $P \in \mathfrak{D}_\rho(A)$ heißt ampel, wenn der Operator $P\rho(a)$ nur für $a = 0$ kompakt ist.

Bemerkung 4.1.4 [HR00, S. 124] Eine Projektion $P \in \mathfrak{D}(A)$ ist genau dann ampel, wenn die Erweiterung φ_ρ injektiv ist.

4.2 K-Homologie

Es seien ρ_1 und ρ_2 zwei ample Darstellungen einer separablen unitären C^*-Algebra A auf zwei separablen Hilberträumen H_1 und H_2. Man kann zeigen, dass es dann einen unitären Isomorphismus $U \colon H_1 \to H_2$ gibt, sodass $U\rho_1(a) \sim \rho_2(a)U$ für jedes $a \in A$ gilt.
Der $*$-Homomorphismus Ad_U bildet nun $\mathfrak{D}_{\rho_1}(A)$ isomorph auf $\mathfrak{D}_{\rho_2}(A)$ ab, weshalb $\mathfrak{D}(A)$ nicht von der gewählten amplen Darstellung ρ abhängt.
Darüber hinaus induzieren zwei solche $*$-Isomorphismen Ad_U den gleichen Isomorphismus zwischen den entsprechenden K-Theorie-Gruppen. Dies rechtfertigt folgende Definition:

Definition 4.2.1 [HR00, S. 125, Def. 5.2.1] Es sei A eine separable und unitale C^*-Algebra. Wir definieren die reduzierten (analytischen) K-Homologie-Gruppen von A durch

$$\tilde{K}^1(A) = K_0(\mathfrak{D}(A))$$
$$\tilde{K}^0(A) = K_1(\mathfrak{D}(A)).$$

Analog dazu können wir nun die unreduzierten K-Homologie-Gruppen wie folgt definieren:

Definition 4.2.2 [HR00, S. 128, Def. 5.2.7] Es sei A eine separable C^*-Algebra, die nicht notwendigerweise ein Einselement besitzt, und es sei $\tilde{A}$ die Unitalisierung von

A. Dann definieren wir für $p \in \{0, 1\}$ die unreduzierten K-Homologie-Gruppen von A wie folgt:

$$K^p(A) = K_{1-p}(\mathfrak{D}(\tilde{A})),$$

wobei $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ die duale Algebra bezüglich einer amplen Darstellung der Unitalisierung $\tilde{A}$ ist.

Bemerkung 4.2.3 Die unreduzierten K-Homologie-Gruppen von A sind also die reduzierten K-Homologie-Gruppen von $\tilde{A}$.

Wir erinnern an den Begriff einer überdeckenden Isometrie:

Erinnerung 4.2.4 Es seien A und B zwei separable und unitale C^*-Algebren mit amplen Darstellungen ρ_A und ρ_B auf separablen Hilberträumen H_A und H_B. Außerdem sei $\alpha\colon A \to B$ ein unitaler $*$-Homomorphismus.
Wir sagen, eine Isometrie $V\colon H_A \to H_B$ überdeckt α, wenn für jedes $a \in A$ die Äquivalenz

$$V^*\rho_A(A)V \sim \rho_B(\alpha(a))$$

modulo kompakter Operatoren erfüllt ist.

Wenn eine Isometrie V die Abbildung α überdeckt, so liegt die Projektion VV^* in der dualen Algebra $\mathfrak{D}(A)$.[1)] Daraus folgt folgendes Lemma:

Lemma 4.2.5 *[HR00, S. 127, Lem. 5.2.3] Es sei $\alpha\colon A \to B$ ein unitaler $*$-Homomorphismus zwischen separablen C^*-Algebren. Ferner überdecke $V\colon H_B \to H_A$ den Homomorphismus α. Dann bildet der $*$-Homomorphismus $Ad_V(T) = VTV^*$ die duale Algebra $\mathfrak{D}(B)$ in $\mathfrak{D}(A)$ ab.*

Lemma 4.2.6 *[HR00, S. 127, Lem. 5.2.4] Jeder unitale $*$-Homomorphismus $\alpha\colon A \to B$ wird von einer Isometrie $V\colon H_B \to H_A$ überdeckt, und je zwei solcher Isometrien, die α überdecken, induzieren die gleiche K-Theorie-Abbildung, also gilt*

$$(Ad_{V_1})_* = (Ad_{V_2})_*\colon K_{1-p}(\mathfrak{D}(B)) \to K_{1-p}(\mathfrak{D}(A)).$$

Beweisskizze: Aus Voiculescu's Theorem[2)] folgt, dass es eine Isometrie $V\colon H_B \to H_A$ gibt, sodass

$$\rho_B(\alpha(a)) \sim V^*(\rho_A(a))V$$

[1)] Dies folgt unter Verwendung von [HR00, S. 56, Lem. 3.1.6].
[2)] Die Aussage kann in [HR00, S. 43, Prop. 2.7.5] nachgelesen werden.

für alle $a \in A$ gilt. Dies bestätigt die Existenz einer derartigen überdeckenden Isometrie.
Um die Eindeutigkeit zu beweisen, seien V_1 und V_2 zwei überdeckende Isometrien. Die beiden Abbildungen

$$T \mapsto \begin{bmatrix} T & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & T \end{bmatrix}$$

bilden $\mathfrak{D}(A)$ auf $M_2(\mathfrak{D}(A))$ ab, und induzieren den gleichen Isomorphismus auf den K-Theorie-Gruppen. Die Eindeutigkeit folgt nun, wenn gezeigt ist, dass dies auch für die Abbildungen

$$T \mapsto \begin{bmatrix} V_1 T V_1^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad T \mapsto \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & V_2 T V_2^* \end{bmatrix},$$

die $\mathfrak{D}(B)$ auf $M_2(\mathfrak{D}(B))$ abbilden, gilt. Die zweiten Abbildungen erhält man aus den ersten, indem mit dem Einselement

$$\begin{bmatrix} I - V_1 V_1^* & V_1 V_2^* \\ V_2 V_1^* & I - V_2 V_2^* \end{bmatrix}$$

konjugiert wird. Dies ist ein Element aus $M_2(\mathfrak{D}(A))$. Nach Lemma 2.4.11 agieren innere Automorphismen trivial auf den K-Theorie-Klassen, woraus die Eindeutigkeit folgt. □

Zwischen den beiden zuvor definierten K-Homologie-Gruppen gibt es folgenden Zusammenhang:

Proposition 4.2.7 *[HR00, S. 129, Prop. 5.2.10] Es sei A eine unitale, separable C^*-Algebra. Dann gibt es eine natürliche lange exakte Sequenz*

$$\ldots \to \tilde{K}^p(A) \xrightarrow{j} K^p(A) \to K^p(\mathbb{C}) \to \tilde{K}^{p+1}(A) \to \ldots,$$

wobei $j\colon \tilde{K}^p(A) \to K^p(A)$ die Vergrößerungsabbildung ist. Dabei kommt die Abbildung $K^p(A) \to K^p(\mathbb{C})$ durch die Funktorialität der unitalen Abbildung $\mathbb{C} \to A$ zustande.

Beweis: Wir betrachten die Quotientenabbildung $\mathfrak{D}(\tilde{A}) \to D(A)/\mathfrak{k}(H)$,

$$\begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix} \mapsto \pi(T_{11}).$$

Diese induziert einen Isomorphismus in der K-Theorie. Wenden wir nun die lange exakte Sequenz in der K-Theorie auf das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathfrak{k}(H) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathfrak{D}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathfrak{D}(A)/\mathfrak{k}(H) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathfrak{k}(H) \arrow[r] & \mathfrak{D}(\mathbb{C}) \arrow[r] & \mathfrak{D}(\mathbb{C})/\mathfrak{k}(H) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

an, in dem die vertikalen Abbildungen durch die Inklusion $\mathbb{C} \to A$ gegeben sind, so erhalten wir folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & K_{1-p}(\mathfrak{D}(A)) \arrow[r, "j"] \arrow[d] & K_{1-p}(\mathfrak{D}(\tilde{A})) \arrow[r] \arrow[d] & K_{-p}(\mathfrak{k}(H)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & K_{1-p}(\mathfrak{D}(\mathbb{C})) \arrow[r, "j"] & K_{1-p}(\mathfrak{D}(\tilde{\mathbb{C}})) \arrow[r] & K_{-p}(\mathfrak{k}(H)) \arrow[r] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Damit folgt die Proposition aus der Definition der reduzierten und unreduzierten K-Homologie und der Tatsache, dass die reduzierte K-Homologie der komplexen Zahlen verschwindet. □

4.3 Relative K-Homologie

Ebenso wie wir zuvor auch relative K-Theorie eingeführt haben, wollen wir nun die relative K-Homologie einführen.
Dazu betrachten wir eine kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren von der Form

$$0 \to J \to A \to A/J \to 0.$$

Unser Ziel ist es, relative K-Homologie-Gruppen $K^p(A, A/J)$ und eine exakte Sequenz der Art

(4.3.1)
$$\begin{tikzcd}
K^1(A/J) \arrow[r] & K^1(A) \arrow[r] & K^1(A, A/J) \arrow[d] \\
K^0(A, A/J) \arrow[u] & K^0(A) \arrow[l] & K^0(A/J) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

anzugeben. Dabei können wir, wie wir gleich sehen werden, die Sequenz nur dann konstruieren, wenn die Quotientenabbildung $A \to A/J$ einen vollständig positiven Schnitt hat.

Definition 4.3.1 [HR00, S. 130, Def. 5.3.2] Es sei $J \subset A$ ein Ideal in einer separablen C^*-Algebra A, und es sei ρ eine Darstellung von A auf einem Hilbertraum H. Wir definieren die relative duale Algebra $\mathfrak{D}_\rho(A//J)$ als Ideal in $\mathfrak{D}_\rho(A)$ wie folgt:

$$\mathfrak{D}_\rho(A//J) = \{T \in \mathfrak{D}_\rho(A) : T\rho(a) \sim 0 \sim \rho(a)T \text{ für alle } a \in J\}.$$

Bemerkung 4.3.2 [HR00, S. 130, Rem. 5.3.3] Wie bereits zuvor werden wir auch hier oftmals die Darstellung vernachlässigen, und setzen

$$\mathfrak{D}(A//J) = \{T \in \mathfrak{D}(A) : Ta \sim 0 \sim aT \text{ für alle } a \in J\}.$$

Bemerkung 4.3.3 Einen Operator $T \in \mathfrak{D}(A)$, der die Voraussetzungen von oben erfüllt, werden wir als lokal kompakt bezeichnen.

Definition 4.3.4 [HR00, S. 130, Def. 5.3.4] Es sei J ein Ideal in einer separablen C^*-Algebra A. Dann definieren wir die relativen K-Homologie-Gruppen von $(A, A/J)$ für $p \in \{0,1\}$ durch

$$K^p(A, A/J) = K_{1-p}\left(\mathfrak{D}(A)/\mathfrak{D}(A//J)\right).$$

Dabei betrachten wir eine Darstellung von A auf einem Hilbertraum $H_{\tilde{A}}$, sollte A kein Einselement enthalten.

Wir erinnern an die Definition der gesplitteten Sequenz:

Erinnerung 4.3.5 [HR00, S. 131, Def. 5.3.6] Es sei

$$0 \to J \to A \to B \to 0$$

eine kurze exakte Sequenz. Wir sagen, diese Sequenz ist halb-gesplittet oder exakt-gesplittet, wenn die Quotientenabbildung $\tilde{A} \to \tilde{B}$ einen positiven Schnitt zulässt.

Damit beobachten wir Folgendes:

Proposition 4.3.6 *[HR00, S. 131, Prop. 5.3.7] Es sei*

$$0 \to J \to A \to A/J \to 0$$

eine halb-gesplittete Sequenz von separablen C^*-Algebren. Außerdem sei $V\colon H_{\tilde{A}/J} \to H_{\tilde{A}}$ eine Isometrie, die die Quotientenabbildung $\pi\colon A \to A/J$ überdeckt. Dann induziert der $*$-Homomorphismus

$$Ad_V\colon \mathfrak{D}(A/J) \to \mathfrak{D}(A//J)$$

einen K-Theorie-Isomorphismus.

Bemerkung 4.3.7 Mit dem vorangegangenen Lemma folgt, dass $K_{1-p}(\mathfrak{D}(A//J))$ isomorph zu $K^p(A/J)$ ist.

4.4 Exkurs: Die K-Theorie von topologischen groben Strukturen

Im Folgenden wollen wir nun die K-Theorie von topologischen groben Strukturen betrachten.

Dazu stellen wir einen Zusammenhang zwischen den C^*-Algebren und den dualen Algebren her. Dadurch können wir die K-Theorie-Gruppen $K_p(C^*(X))$ durch K-Homologie-Klassen ausdrücken.

Wir betrachten einen lokal kompakten Raum X, der eine metrifizierbare Kompaktifizierung $\bar{X}$ besitzt. Sei $A = C(\bar{X})$ und $J = C_0(X)$, sodass $A/J = C(\partial X)$. Dabei ist $\partial X = \bar{X} \setminus X$. Es sei J ampel auf einem Hilbertraum H dargestellt. Diese Darstellung kann zu einer Darstellung von A erweitert werden, die wiederum ampel ist, da X dicht in $\bar{X}$ liegt.

Wir haben zwei Möglichkeiten kennen gelernt, um eine solche C^*-Algebra zu erhalten:

(i) Wir bilden die relative duale Algebra $\mathfrak{D}(A//J)$, die aus den Operatoren auf H besteht, die lokal kompakt für die Wirkung auf J sind und modulo der kompakten Operatoren mit der Aktion auf A kommutieren.

(ii) Wir bilden die C^*-Algebra $C^*(X)$, die der Abschluss der Vereinigung aller Operatoren auf H ist, die lokal kompakt für die Wirkung auf $C_0(X)$ und topologisch kontrollierbar für die Kompaktifizierung $\bar{X}$ sind.

Beide Wege führen zum gleichen Ergebnis:

Satz 4.4.1 *[HR00, S. 157, Th. 6.5.1] Es sei X ein lokal kompakter Hausdorff-Raum, der mit einer metrifizierbaren Kompaktifizierung $\bar{X}$ ausgestattet ist. Dann stimmt die Algebra $C^*(X)$ bezüglich der topologischen groben Struktur auf X mit der relativen dualen Algebra $\mathfrak{D}(A//J)$ überein. Dabei ist $A = C(\bar{X})$ und $J = C_0(X)$.*

Für das weitere Vorgehen benötigen wir folgendes Korollar:

Korollar 4.4.2 *[HR00, S. 158, Cor. 6.5.2] Es sei X ein lokal kompakter Raum, der mit einer metrifizierbaren Kompaktifizierung $\bar{X}$ ausgestattet ist. Außerdem sei $\partial X = \bar{X} \setminus X$. Dann existiert ein Isomorphismus*

$$K_p(C^*(X)) \cong \tilde{K}^{1-p}(C(\partial X)).$$

4.5 Homotopieinvarianz der K-Homologie

Wir haben bereits gesehen, dass die K-Theorie homotopieinvariant ist. Dass Selbiges auch für die K-Homologie gilt, wollen wir nun beweisen.

Ist $\alpha_t \colon A \to B, t \in [0,1]$ eine punktweise stetige Familie von $*$-Homomorphismen, so induzieren α_0 und α_1 die gleiche Abbildung zwischen den K-Homologie-Klassen.

Dabei ist eine punktweise stetige Familie von $*$-Homomorphismen α_t dasselbe wie ein einzelner $*$-Homomorphismus $\alpha\colon A \to C[0,1] \otimes B$. Wir erhalten die allgemeine Aussage über die Homotopieinvarianz der K-Homologie, wenn wir zeigen, dass die $*$-Homomorphismen

$$\beta_0, \beta_1\colon C[0,1] \otimes B \to B,$$
$$\beta_t(f \otimes b) = f(t)b$$

die gleiche Abbildung induzieren. Jeder auf diese Weise erhaltene $*$-Homomorphismus ist eine Linksinverse zum $*$-Homomorphismus $\gamma\colon B \to C[0,1] \otimes B$, der durch

$$\gamma(b) = 1 \otimes b$$

gegeben ist. Deshalb reicht es, zu zeigen, dass jede dieser Abbildungen einen Isomorphismus auf den K-Homologie-Klassen induziert. Aus Symmetriegründen genügt es sogar, zu zeigen, dass dies für eine der beiden Abbildungen β_0, β_1 stimmt. Wir werden dies für β_0 zeigen.
Durch die bereits betrachteten exakten Sequenzen wissen wir, dass der surjektive $*$-Homomorphismus genau dann einen Isomorphismus zwischen den K-Homologie-Klassen definiert, wenn der Kern

$$\ker(\beta_0) = C_0[0,1] \otimes B$$

verschwindet.
Insgesamt erhalten wir also folgendes Korollar:

Korollar 4.5.1 *[HR00, S. 162, Kor. 6.6.2] Es sei $\alpha_t\colon A \to B, t \in [0,1]$ eine punktweise stetige Familie von $*$-Homomorphismen zwischen zwei separablen C^*-Algebren, wobei B kommutativ ist. Dann induzieren α_0 und α_1 die gleiche Abbildung zwischen den K-Homologie-Gruppen.*

Damit ist es nun möglich, folgenden Satz zu beweisen.

Satz 4.5.2 *[HR00, S. 160 f., Th. 6.6.1] Es sei B eine kommutative separable C^*-Algebra. Dann sind die K-Homologie-Gruppen der Algebra $C_0(0,1] \otimes B$ trivial.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass B unital ist, sodass $B = C(Y)$ für einen kompakten metrifizierbaren Raum Y. Dann ist die Unitalisierung von $C_0(0,1] \otimes B$ die Algebra der stetigen Funktionen auf dem abgeschlossenen Kegel $\mathcal{C}Y$. Dadurch stimmt die K-Homologie von $C_0(0,1] \otimes B$ mit der reduzierten K-Homologie von $C(\mathcal{C}Y)$ überein.
Ist nun X_c ein offener Kegel von $\mathcal{C}Y$, der mit der topologischen groben Struktur ausgestattet ist, so können wir nach Korollar 4.4.2 die reduzierte K-Homologie von $C(\mathcal{C}Y)$

mit der K-Theorie der groben C^*-Algebra $C^*(X_c)$ identifizieren. Es ist deshalb ausreichend, zu zeigen, dass

$$K_p(C^*(X_c)) = 0,$$

falls $X_c = \mathcal{O}_c(\mathcal{C}Y)$.
Dazu vergleichen wir im Folgenden die topologische grobe Struktur auf $X_c = \mathcal{O}(\mathcal{C}Y)$ mit den metrischen groben Strukturen auf $X_\varphi = \mathcal{O}_\varphi(\mathcal{C}Y)$.
Wir betten Y in die Einheitsphäre von einem reellen Hilbertraum H ein. Sei nun $H' = \mathbb{R} \oplus E$. Dann lässt sich $\mathcal{C}Y$ in die Einheitssphäre von H' wie folgt einbetten:

$$\mathcal{C}Y = \{(s, ty) \colon y \in Y, 0 \leq s, t \leq 1, s^2 + t^2 = 1\}.$$

Ein Punkt $v' = (r, v) \in H'$ liegt genau dann auf einem Strahl durch $\mathcal{C}Y$, wenn $r \geq 0$ gilt und v auf einem Strahl durch Y liegt. Somit erhalten wir eine Isometrie

$$\mathcal{O}_\varphi(\mathcal{C}Y) = \mathbb{R}^+ \times \mathcal{O}_\varphi Y.$$

Dies ist möglich, wenn wir auf der rechten Seite die Produktmetrik betrachten. Mit Proposition 3.4.4 können wir nun folgern, dass

$$K_p(C^*(X_\varphi)) = 0$$

für jede metrische grobe Struktur X_φ auf X gilt.
Um den Beweis abzuschließen, müssen wir noch die topologische grobe Struktur X_c mit der metrischen groben Struktur X_φ in Verbindung bringen. Nach Proposition 3.2.3 ist X_c die kleinste obere Schranke der Strukturen X_φ. Demnach folgt auch, dass jedes $C^*(X_\varphi)$ eine Unteralgebra von $C^*(X_c)$ ist, und dass die Vereinigung über alle φ aller Unteralgebren dicht ist. Da die Homöomorphismen φ eine gerichtete Set definieren, folgt aus der Stetigkeit der K-Theorie die Gleichung

$$K_p(C^*(X_c)) = \lim K_p(C^*(X_\varphi)).$$

Da alle K-Theorie-Gruppen auf der rechten Seite trivial sind, gilt dies insbesondere auch für den Grenzwert. □

4.6 Ausschneidungen

In diesem Kapitel wollen wir folgende Isomorphie beweisen:

$$K^p(A, A/J) \cong K^p(J).$$

Dabei gehen wir von einer separablen C^*-Algebra A aus, deren Unitalisierung $\tilde{A}$ ampel auf einem Hilbertraum $H_{\tilde{A}}$ dargestellt ist.
Zunächst beobachten wir Folgendes:

Lemma 4.6.1 *[HR00, S. 134, Lem. 5.4.1] Die Gruppen $K_p(\mathfrak{D}(A//A))$ sind für jede separable C^*-Algebra und $p \in \{0,1\}$ trivial.*

Beweis: Aus Proposition 4.3.6 folgt, dass $\mathfrak{D}(A//A)$ und $\mathfrak{D}(0)$ in der K-Theorie miteinander identifiziert werden können. Da die K-Theorie von $\mathfrak{D}(0)$ trivial ist, gilt dies auch für $K_p(\mathfrak{D}(A//A))$. □

Bemerkung 4.6.2 Beim vorangegangenen Lemma ist es wichtig, dass wir von $H_{\tilde{A}}$ und nicht von H_A ausgehen: Ist A unital, so ist die relative duale Algebra $\mathfrak{D}(A//A)$ auf dem Hilbertraum H_A die C^*-Algebra $\mathfrak{k}(H)$ von kompakten Operatoren, deren K-Theorie nicht trivial ist.

Aus Lemma 4.6.1 und der sechs-termigen exakten Sequenz in der K-Theorie (2.7.1) folgt, dass die Quotientenabbildung

$$\mathfrak{D}(A) \to \mathfrak{D}(A)/\mathfrak{D}(A//A)$$

zwischen den assoziierten dualen Algebren einen Isomorphismus

$$K^p(A) \cong K_{1-p}(\mathfrak{D}(A)/\mathfrak{D}(A//A)) \tag{4.6.1}$$

induziert, wenn A auf $H_{\tilde{A}}$ dargestellt ist.

Bemerkung 4.6.3 [HR00, S. 134, Rem. 5.4.4] Ist eine unitale C^*-Algebra A ampel auf einem Hilbertraum H_A dargestellt, und ist die duale Algebra $\mathfrak{D}(A)$ auf diesem Hilbertraum geformt, so induziert die zuvor angegebene Quotientenabbildung immer noch einen Isomorphismus.

Ohne Beweis geben wir nun das Ausschneidetheorem[3)] an:

Satz 4.6.4 (Ausschneide-Satz) *[HR00, S. 134, Excision Th. 5.4.5] Es sei A eine separable C^*-Algebra und $\tilde{A}$ eine ample Darstellung auf einem separablen Hilbertraum $H_{\tilde{A}}$. Ferner seien J ein Ideal in A und $\mathfrak{D}(A)$ und $\mathfrak{D}(J)$ die C^*-Algebren auf $H_{\tilde{A}}$. Dann bildet die Inklusion $\mathfrak{D}(A) \subset \mathfrak{D}(J)$ die Algebra $\mathfrak{D}(A//J)$ auf $\mathfrak{D}(J//J)$ ab und induziert einen Isomorphismus*

$$\mathfrak{D}(A)/\mathfrak{D}(A//J) \to \mathfrak{D}(J)/\mathfrak{D}(J//J).$$

Daraus resultierend gibt es einen Ausschneide-Isomorphismus $K^p(A, A/J) \cong K^p(J)$.

[3)] Der Beweis findet sich in [HR00] und nutzt im Wesentlichen Kasparov's Technical Theorem ([HR00, S. 76, Kasparov's Technical Theorem 3.8.1]).

Für den weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigen wir noch den Begriff der pseudolokalen Operatoren und Kasparovs Lemma, welches wir im Folgenden beweisen werden.

Definition 4.6.5 [HR00, S. 135, Def. 5.4.6] Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum. Wir nehmen an, dass $C(X)$ über eine nicht-entartete Darstellung ρ auf einem Hilbertraum H wirkt. Dann heißt ein Operator $T \in \mathfrak{B}(H)$ pseudolokal, wenn fTg für jede Wahl von stetigen Funktionen f und g mit disjunkten Trägern einen kompakten Operator definiert.

Lemma 4.6.6 (Kasparovs Lemma) *[HR00, S. 135, Kasparov's Lemma 5.4.7] Es sei X ein kompakter Hausdorff-Raum und $C(X)$ operiere durch eine nicht-entartete Darstellung auf einem Hilbertraum H. Es sei $T \in \mathfrak{B}(H)$ ein pseudolokaler Operator. Dann ist $[T,f] \sim 0$ für alle $f \in C(X)$. Daher besteht die duale Algebra $\mathfrak{D}(C(X))$ komplett aus den pseudolokalen Operatoren auf H.*

Beweis: Wir haben bereits gesehen, dass jede Darstellung von $C(X)$ zu einer Darstellung der beschränkten Borelfunktionen erweitert werden kann. Außerdem können wir stetige Funktionen f', g' mit disjunkten Trägern finden, sodass $f = ff'$ und $g = gg'$ erfüllt sind. Daher gilt

$$fTg = ff'Tgg' \sim 0,$$

weshalb für einen pseudolokalen Operator T für alle Borelfunktionen mit disjunkten Trägern $fTg \sim 0$ gilt.
Im Folgenden wollen wir nun zeigen, dass für eine reellwertige Funktion f auf X der Kommutator $[f,T]$ durch kompakte Operatoren approximiert werden kann. Sei dazu $\varepsilon > 0$. Wir unterteilen den Bereich von f in Borelmengen $U_1,\dots,U_n$ mit einem Durchmesser diam $U_i < \varepsilon$, sodass $\bar{U}_i$ die Menge $\bar{U}_j$ genau dann schneidet, wenn $|i-j| \leq 1$. Dies ist zum Beispiel möglich, indem man U_i als Folge sich nicht überschneidener halb-offener Intervalle wählt. Seien $f_1,\dots,f_n$ die charakteristischen Funktionen der Borelmengen $f^{-1}[U_1],\dots,f^{-1}[U_n]$ in X.
Nun gilt:

(i) Ist $|i-j| > 1$, so ist $f_i T f_j \sim 0$.
(ii) Ist $\tilde{f} = f(x_1)f_1 + \ldots + f(x_n)f_n$, wobei $x_1,\dots,x_n$ Punkte aus $f^{-1}[U_1],\dots,f^{-1}[U_n]$ sind, so ist $\|f - \tilde{f}\| < \varepsilon$.

Der Abstand des Operators $[f,T]$ von $[\tilde{f},T]$ beträgt maximal $2\varepsilon\|T\|$, und da für die Funktionen $f_1 + \ldots + f_n = 1$ gilt, erhalten wir außerdem

$$\begin{aligned} \tilde{f}T - T\tilde{f} &= \sum_{i,j} f(x_i) f_i T f_j - f_i T f(x_j) f_j \\ &\sim \sum_{|i-j|=1} \big(f(x_i) - f(x_j)\big) f_i T f_j. \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

Wir unterteilen die letzte Summe in zwei Teile:

(i) $i = j+1$
(ii) $i = j-1$

Der erste Teil ist eine direkte Summe von Operatoren von der Form

$$(f(x_{j+1} - f(x_j))f_{j+1}Tf_j,$$

die von f_jH nach $f_{j+1}H$ abbilden. Die Norm der ersten Summe entspricht demnach dem Maximum der Normen der einzelnen Summanden. Da $|f(x_{j+1}) - f(x_j)| < 2\varepsilon$, ist die Norm des ersten Teils kleiner oder gleich $2\varepsilon\|T\|$.
Der zweite Teil der Summe lässt sich analog händeln und auch in diesem Fall ergibt sich eine Norm, die kleiner oder gleich $2\varepsilon\|T\|$ ist. Insgesamt ist also die Norm der Summe (4.6.2) kleiner als $4\varepsilon\|T\|$. Demnach ist der Operator $[f,T]$ innerhalb der Norm der Grenzwert von kompakten Operatoren, was den Beweis beendet. □

4.7 Exkurs: Kasparovs K-Homologie

Unter Verwendung der Paschke-Dualität ist es möglich, einen Zusammenhang zwischen $K_p(C^*(X))$ und einer bestimmten Art der Homologie-Gruppen herzustellen. Dieser Zusammenhang ist besonders interessant, da es sich bei $K_p(C^*(X))$ um analytisch definierte grobe Invarianten von X handelt, wohingegen die Homologie-Gruppen eher der klassischen algebraischen Geometrie zuzuordnen sind.

Ähnliche Überlegungen führten dazu, dass Atiyah anregte, ebendiese Homologie-Gruppen mit Mitteln der Funktionalanalysis darzustellen[4)]. Die Ergebnisse[5)], die Kasparov ausgehend von diesen Überlegungen erzielte, wollen wir im Folgenden näher betrachten.

Dazu betrachten wir einen lokal kompakten Hausdorff-Raum X.
Die Definition der Darstellung einer C^*-Algebra (Def. 2.1.6) können wir dann wie folgt in die Definition eines X-Moduls überführen.

Definition 4.7.1 [Roe96, S. 35] Einen Hilbertraum H, der mit einer Aktion auf der C^*-Algebra $C_0(X)$ ausgestattet ist, bezeichnen wir als X-Modul.

Definition 4.7.2 [Roe96, S. 35, Def. 5.1] Es sei X ein Raum. Ein gerader (oder ungerader) Fredholm-Modul von X besteht aus einem X-Modul H und einem Operator U auf H_X, sodass

4)Die Überlegungen sind in [Ati70] dargelegt.
5)Die Ergebnisse wurden in [Kas75], [Kas80] veröffentlicht.

(i) im geraden Fall die Operatoren UU^*-1, U^*U-1 und der Kommutator $[U,f]$ für jedes $f \in C_0(X)$, sowie
(ii) im ungeraden Fall die Operatoren $U-U^*$, $U-U^2$ und der Kommutator $[U,f]$ für jedes $f \in C_0(X)$

lokal kompakt sind.

Bemerkung 4.7.3 [Roe96, S. 35] Auf den Fredholm-Modulen gibt es einige natürliche Äquivalenzrelationen. Dazu gehören beispielsweise die Homotopie und die unitäre Äquivalenz. Kasparov zeigte, dass diese Äquivalenzrelationen unter Bildung der direkten Summe Äquivalenzklassen definieren, die abelsche Gruppen sind. Diese stimmen mit den zuvor definierten K-Theorie-Gruppen überein. Aus diesem Grund bezeichnen $K_0(X)$ und $K_1(X)$ die auf diese Weise entstehende Äquivalenzklasse bei geraden beziehungsweise ungeraden Fredholm-Modulen.

In Kasparovs ursprünglicher Definition kann der zugrundeliegende X-Modul beliebig sein. Es ist aber auch möglich, die K-Homologie auf einen einzelnen X-Modul zurückzuführen.

Aus dem Brown-Douglas-Fillmore-Theorem ([BDF77]) folgt, dass wir die X-Module zusammenfassen können. Dazu betrachten wir einen nicht-degenerierten X-Modul H' und einen adäquaten X-Modul, das heißt, es gelte $\overline{C_0(X)H} = H$ und es wirke kein Element von $C_0(X)$, das nicht null ist, auf H wie ein kompakter Operator. Betten wir nun H' als direkte Summe in $H \oplus H'$ ein und konjugieren wir mit der Abbildung X, so erhalten wir einen Fredholm-Modul auf H aus einem beliebigen Fredholm-Modul auf H'.
Im Folgenden können wir also für einen beliebigen Raum X einen einzelnen adäquaten X-Modul H_X betrachten.

Wir erinnern an die Definition der pseudolokalen Operatoren und die daraus entstehenden C^*-Algebren.

Erinnerung 4.7.4 Ein Operator $T \in \mathfrak{B}(H_X)$ heißt pseudolokal, wenn fTg für jede Wahl von stetigen Funktionen f und g mit disjunkten Trägern einen kompakten Operator definiert.
Die pseudolokalen Operatoren bilden eine C^*-Algebra, die wir wie zuvor mit $\mathfrak{D}^*(X)$ bezeichnen. Die lokal kompakten Operatoren bilden ein Ideal in $\mathfrak{D}^*(X)$, das wir mit $\mathfrak{C}^*(X)$ bezeichnen.

Ein gerader (oder ungerader) Fredholm-Modul führt nach Definition auf ein Einselement (oder eine Projektion) in der Quotientenalgebra $\mathfrak{D}^*(X)/\mathfrak{C}^*(X)$. Aus diesem Grund definierte Kasparov die K-Homologie wie folgt:

Definition 4.7.5 [Roe96, S. 37, Def. 5.5] Die i-te K-Homologie-Gruppe $K_i(X)$ ist durch die Vorschrift

$$K_i(X) = K_{i+1}\left(\mathfrak{D}^*(X)/\mathfrak{C}^*(X)\right)$$

gegeben.

5 Differentialoperatoren

Differentialoperatoren bilden die letzte wichtige Grundlage für Kapitel 6, in dem wir Anwendungen in der groben Geometrie betrachten wollen. Daher sollen Differentialoperatoren in diesem Kapitel eingeführt und darüber hinaus die Homologie-Klasse eines selbstadjungierten Operators ermittelt werden.

5.1 Differentialoperatoren erster Ordnung

Zunächst wollen wir die Differentialoperatoren erster Ordnung einführen, da sie die Basis für die gesamte Theorie der Differentialoperatoren bilden.

Definition 5.1.1 [HR00, S. 269, Def. 10.1.1] Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und S ein glattes komplexes Vektorraumbündel über M. Es bezeichne $C^\infty(M,S)$ den Raum der glatten Schnitte über S. Ein linearer Differentialoperator erster Ordnung ist eine komplex-lineare Abbildung

$$D\colon C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S),$$

sodass die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(i) Stimmen zwei glatte Schnitte u_1 und u_2 in S auf einer offenen Menge $U \subset M$ überein, so gilt auch

$$(Du_1)_{|U} \equiv (Du_2)_{|U}.$$

(ii) Für jedes Koordinatensystem $U \subset M$ mit Koordinaten x_j und eine Trivialisierung des Bündels S über U lässt sich D in lokalen Koordinaten durch die Formel

$$Du = A^j \frac{\partial u}{\partial x^j} + Bu$$

für glatte, Matrix-wertige Funktionen A^j und B auf U darstellen. Dabei wird gemäß der Einsteinschen Summenkonvention über doppelt auftauchende Indizes (hier j) summiert.

Da wir einen Differentialoperator erster Ordnung nach Teil (ii) in Definition 5.1.1 lokal darstellen können, können wir ihn insbesondere auch auf offene Teilmengen von M einschränken. Dies erlaubt uns die Definition des Trägers wie folgt:

Definition 5.1.2 [HR00, S. 270] Es sei $D\colon C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S)$ ein Differentialoperator erster Ordnung. Dann ist der Träger von D, geschrieben $\operatorname{supp}(D)$, das Komplement der größten offenen Teilmenge U von M, für die D auf U verschwindet.

Die in Definition 5.1.1 auftauchenden Funktionen A^j und B hängen von der Wahl des Koordinatensystems und der Trivialisierung ab. Ist jedoch der Kotangentialvektor $\xi = \xi_j \mathrm{d}x^j$ in einem Punkt $x \in M$ gegeben, so ist

$$\sigma_D(x,\xi) = A^j \xi_j,$$

aufgefasst als Endomorphismus auf dem Vektorraum S_x, unabhängig von der Wahl der Koordinaten.
Tatsächlich kann man zeigen, dass für jede glatte Funktion g und den dazugehörigen Operator $\rho(g)$ auf $C^\infty(M,S)$, der durch die Multiplikation mit g gegeben ist, folgende Gleichung für jeden glatten Schnitt u über S erfüllt ist:

$$\sigma_D(x,\mathrm{d}g)u(x) = ([D,\rho(g)]u)(x).$$

Dies rechtfertigt folgende Definition:

Definition 5.1.3 [HR00, S. 270, Def. 10.1.3] Es sei $D\colon C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S)$ ein Differentialoperator. Das Symbol von D ist der Vektorbündel-Morphismus

$$\sigma_D\colon T^*M \to \operatorname{End}(S),$$

der durch

$$\sigma_D(x,\xi) = A^j \xi_j$$

gegeben ist.

Im Folgenden setzen wir zumeist ohne explizite Erwähnung die Existenz einer hermiteschen Metrik h auf dem Vektorbündel S sowie die Existenz eines glatten Maßes μ auf M voraus. Damit können wir ein inneres Produkt auf $C_c^\infty(M,S)$ als Raum der glatten Schnitte auf S mit kompaktem Träger mit Hilfe der folgenden Formel definieren:

$$< u,v >= \int_M h(u(x),v(x))\mathrm{d}\mu(x).$$

Bemerkung 5.1.4 [HR00, S. 271] Den Hilbertraum, der durch den Abschluss von $C_c^\infty(M,S)$ bezüglich des inneren Produktes gegeben ist, bezeichnen wir mit $L^2(M,S)$.

Proposition 5.1.5 *[HR00, S. 271, Prop. 10.1.4] Es sei $D\colon C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S)$ ein Differentialoperator erster Ordnung. Dann gibt es einen eindeutig bestimmten Differentialoperator $D^*\colon C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S)$, sodass für alle Funktionen $u,v \in C_c^\infty(M,S)$ folgende Gleichung erfüllt ist:*

$$< Du, v > = < u, D^* v > .$$

Definition 5.1.6 [HR00, S. 271, Def. 10.1.5] Der Operator D^* heißt formales Adjungiertes von D.

5.2 Symmetrische und selbstadjungierte Differentialoperatoren

Im Folgenden wollen wir einige Aussagen der Hilbertraum-Theorie auf Differentialoperatoren ausweiten. Dabei gilt es jedoch zu beachten, dass Differentialoperatoren nicht beschränkt sind, da die L^2-Norm der Ableitung von u nicht durch Terme der L^2-Norm von u kontrolliert werden kann.
Um einige der bereits bekannten Aussagen übernehmen zu können, betrachten wir den Differentialoperator D als unbeschränkten Operator auf

$$C_c^\infty(M,S) \subset L^2(M,S).$$

Zunächst erinnern wir an die Definition eines abschließbaren Operators.

Erinnerung 5.2.1 Ein unbeschränkter Operator T auf einem Hilbertraum H heißt abschließbar, wenn der Abschluss des Graphen bzgl. der Norm mit dem Graphen eines anderen unbeschränkten Operators übereinstimmt. Diesen bezeichnen wir als Abschluss von T und schreiben $\bar{T}$.

Lemma 5.2.2 *[HR00, S. 272, Lem. 10.2.1] Jeder Differentialoperator D ist abschließbar.*

Beweis: Nach Definition ist der Abschluss des Graphen von D wieder ein Graph, was bedeutet, dass der Abschluss des Graphen jeden vertikalen Graphen in nur einem Punkt schneidet. Aufgrund der Linearität reicht es aus, zu zeigen, dass für jede Folge $\{v_j\} \subseteq C_c^\infty(M,S)$ mit $v_j \to 0$ in H und mit $Dv_j \to w$ in H auch $w = 0$ gilt. Dies sehen wir wie folgt:
Ist $u \in C_c^\infty(M,S)$, so gilt

$$< u, w > = \lim < u, Dv_j > = \lim < D^* u, v_j > = 0.$$

Demnach ist w orthogonal zum dichten Unterraum $C_c^\infty(M,S)$ von $L^2(M,S)$, woraus $w = 0$ folgt. □

Ebenso erinnern wir an die Definition eines symmetrischen und eines selbstadjungierten Operators.

Erinnerung 5.2.3 [HR00, S. 20, Def. 1.8.3] Ein unbeschränkter Operator T heißt symmetrisch, wenn $T \subset T^*$ gilt, das heißt, wenn $< Tu, v > = < u, Tv >$ für alle u, v im Gebiet von T erfüllt ist.
T heißt selbstadjungiert, wenn $T = T^*$ gilt.

Definition 5.2.4 [HR00, S. 272, Def. 10.2.2] Es sei $D\colon C_c^\infty(M,S) \to C_c^\infty(M,S)$ ein symmetrischer Differentialoperator. Das minimale Gebiet von D ist das Gebiet des Abschlusses $\bar{D}$. Das maximale Gebiet von D ist das Gebiet des adjungierten Operators D^*.
Stimmt das maximale Gebiet von D mit dem minimalen Gebiet überein, so heißt D wesentlich selbstadjungiert.

Ist D symmetrisch, so ist das Adjungierte D^* auf dem Hilbertraum eine Erweiterung des Abschlusses $\bar{D}$, welches wiederum eine Erweiterung von D ist. Es gilt also

$$D \subseteq \bar{D} \subseteq D^*.$$

Bevor wir beweisen können, dass eine Funktion $u \in L^2(M,S)$ genau dann zum minimalen Gebiet eines symmetrischen Differentialoperators D gehört, wenn sie zum maximalen Gebiet gehört, benötigen wir folgendes Lemma aus der Operatortheorie.

Lemma 5.2.5 *[HR00, S. 20, Lem. 1.8.1] Es sei T ein abschließbarer Operator auf einem Hilbertraum H. Dann gehört $u \in H$ genau dann zum Gebiet des Abschlusses $\bar{T}$ von T, wenn es eine Folge $\{u_j\}_{j=1}^\infty$ im Gebiet von T gibt, sodass $u_j \to u$ gilt, wobei $\|Tu_j\|$ beschränkt bleibt.*

Beweis: Angenommen, es gibt eine Folge $\{u_j\}_{j=1}^\infty$, die die Voraussetzungen des Lemmas erfüllt. Da die Folge $\{Tu_j\}$ beschränkt ist, können wir eine Teilfolge $\{u_{j_k}\}$ finden, für die $\{Tu_{j_k}\}$ schwach konvergent ist, das heißt, $< Tu_{j_k}, v >$ konvergiert für jedes v. Der Satz von Hahn-Banach impliziert nun, dass der Abschluss bzgl. der schwachen Konvergenz und der Norm von jeder konvexen Teilmenge von H übereinstimmen. Ersetzen wir also u_{j_k} durch geeignete konvexe Folgeglieder w_k, so finden wir eine Folge, sodass $\{Tw_k\}$ in der Norm konvergiert. Dabei gilt $w_k \to u$. Die Folge von Punkten (w_k, Tw_k) gehört zum Graphen von T und konvergiert gegen einen Punkt, dessen erste Koordinate u ist, weshalb u zum minimalen Gebiet gehört.
Die zweite Richtung folgt aus der Definition des Abschlusses. □

Lemma 5.2.6 *[HR00, S. 273, Lem. 10.2.5] Es sei D ein symmetrischer Differentialoperator und $u \in L^2(M,S)$ habe einen kompakten Träger. Dann gehört u genau dann zum minimalen Gebiet von D, wenn es zum maximalen Gebiet gehört.*

Beweis: Es sei K eine kompakte Teilmenge von M. Dann gibt es für hinreichend kleines $t > 0$ Operatoren $F_t\colon L_2(K,S) \to L^2(M,S)$, sodass

(i) $\|F_t\| \leq 1$;
(ii) für jedes $u \in L^2(K,S)$ gilt $F_t u \to u$ in $L^2(M,S)$ für $t \to 0$;
(iii) für jedes $u \in L^2(K,S)$ ist $F_t u$ glatt und hat kompakten Träger;
(iv) der Kommutator $[D,F_t]$ kann zu einem beschränkten Operator von $L^2(K,S)$ in $L^2(M,S)$ erweitert werden, dessen Norm unabhängig von t beschränkt ist.

Wir nehmen nun an, dass u zum maximalen Gebiet von D gehört, und dass der Träger in K liegt. Dann ist $F_t u$ glatt, hat einen kompakten Träger, und geht für $t \to 0$ gegen u. Außerdem erhalten wir

$$DF_t u = F_t D u + [D,F_t]u$$

Deshalb ist $DF_t u$ uniform beschränkt und das Resultat folgt mit Lemma 5.2.5. □

Bemerkung 5.2.7 [HR00, S. 273, Cor. 10.2.6] Man kann zeigen, dass jeder symmetrische Differentialoperator auf einer kompakten Mannigfaltigkeit ohne Rand und jeder symmetrische Differentialoperator mit kompaktem Träger auf einer offenen Mannigfaltigkeit wesentlich selbstadjungiert ist.

Definition 5.2.8 [HR00, S. 274, Def. 10.2.8] Es sei D ein Differentialoperator auf einer Mannigfaltigkeit M. Dann sagen wir, dass M vollständig für D ist, wenn es eine glatte, eigentliche Funktion $g\colon M \to \mathbb{R}$ gibt, sodass $[D,\rho(g)]$ ein beschränkter Operator auf einem Hilbertraum ist.

Beispiel 5.2.9 [HR00, S. 274, Ex. 10.2.9] Ist $M = \mathbb{R}$ und $D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, so ist M vollständig für D. Man kann hier g beispielsweise als die Identität wählen.

5.3 Elliptische Differentialoperatoren

Definition 5.3.1 [HR00, S. 279, Def. 10.4.1] Es sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und S ein glattes Vektorraumbündel über M. Ein Differentialoperator

$$D\colon C^\infty(M,S) \to C^\infty(M,S)$$

heißt elliptisch, falls sein Symbol $\sigma_D(x,\xi)$ für jedes $\xi \in T^*_x M, \xi \neq 0$, ein invertierbarer Endomorphismus auf S_x ist.

D heißt elliptisch auf U für eine offene Teilmenge $U \subset M$, wenn die Einschränkung von D auf U elliptisch ist.

Definition 5.3.2 [HR00, S. 279, Def. 10.4.2] Es sei S ein glattes Vektorraumbündel über M und $K \subset M$ kompakt. Der Sobolev-Raum $L_1^2(K,S)$ besteht aus allen Elementen aus $L^2(M,S)$, deren Träger in K liegen, und die zum maximalen Gebiet aller Differentialoperatoren erster Ordnung gehören, die auf dem Bündel S über M operieren.

Beispiel 5.3.3 [HR00, S. 279 f.] Wir betrachten den Torus T^n mit dem Trivialbündel. Dann können wir den Sobolev-Raum mit Termen von Fourier-Reihen ausdrücken. Da der Torus kompakt ist, können wir $K = T^n$ betrachten. Wir entwickeln die Funktion $u \in L^2(T^n)$ als Fourier-Reihe

$$u(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \hat{u}(k) z^k$$

mit $z = (z_1, \dots, z_n) \in T^k$, $z^k = z_1^{k_1} \cdots z_n^{k_n}$ und

$$\hat{u}(k) = \int_{T^n} u(z) z^{-k} \mathrm{d}z.$$

Der Sobolev-Raum $L_1^2(T^n)$ besteht aus allen L^2-Funktionen, für die die gewichtete Summe

$$\|u\|_1^2 = \sum_k (1 + |k|^2) |\hat{u}(k)|^2$$

endlich ist. Dabei bezeichne $|k|$ die Summe $|k_1| + \ldots + |k_n|$. Dies folgt aus der Übereinstimmung (bis auf einen multiplikativen Faktor) der partiellen Ableitung in Richtung der j-ten Koordinate auf T^n mit der Operation $\hat{u}(k) \mapsto k_j \hat{u}(k)$ auf den Fourier-Koeffizienten.

Wir wollen nun noch zwei wichtige Aussagen angeben: Rellichs Lemma und die Ungleichung von Gårding.

Lemma 5.3.4 (Lemma von Rellich) *[HR00, S. 280, Lem. 10.4.3] Es sei S ein glattes Vektorraumbündel über M und $K \subset M$ kompakt. Dann ist die Inklusionsabbildung*

$$L_1^2(K,S) \to L^2(M,S)$$

ein kompakter Operator.

Aus der Definition des Sobolev-Raums folgt, dass jeder Differentialoperator erster Ordnung aufgefasst als ein Operator von $L_1^2(K,S)$ nach $L^2(M,S)$ beschränkt ist. Das entsprechende Resultat für elliptische Operatoren liefert Gårdings Ungleichung:

Satz 5.3.5 (Gårdings Ungleichung) *[HR00, S. 280, Gårdings Ineq. 10.4.4] Es seien D ein Differentialoperator erster Ordnung auf M und $K \subset M$ kompakt. Ist D elliptisch auf einer Umgebung von K, so existiert eine Konstante $c > 0$, sodass*

$$\|u\| + \|Du\| \geq c \cdot \|u\|_1$$

für alle $u \in L_1^2(K,S)$ gilt. Dabei bezeichne $\|\cdot\|$ die $L^2(M,S)$-Norm und $\|\cdot\|_1$ bezeichne die Norm auf dem Sobolev-Raum $L_1^2(K,S)$.

Beweisskizze: Wir beweisen den Satz für einen elliptischen Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten auf einem Torus. Es sei $v := Du$. Dann reicht es aus, zu zeigen, dass es Konstanten $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ gibt, sodass

$$|\hat{v}(k)| \geq \alpha \cdot |k| \cdot |\hat{u}(k)| - \beta |\hat{u}(k)|$$

gilt. Um diese Ungleichung zu verifizieren, schreiben wir D als

$$D = \sum A^j \frac{\partial}{\partial x^j} + B$$

wobei A^j und B konstante Matrizen seien. Für einen Multi-Index k sei $A \cdot k$ gegeben durch $A^j k_j$. Durch die Elliptizität von D ist $A \cdot k$ für $k \neq 0$ invertierbar und für eine positive Konstante α gilt $|(A \cdot k)| \geq \alpha |k|$.
Außerdem gilt

$$\begin{aligned}\hat{v}(k) &= \int (A \cdot k) u(z) z^k \mathrm{d}z + B \int u(z) z^k \mathrm{d}z \\ &= (A \cdot k)\hat{u}(k) + B\hat{u}(k).\end{aligned}$$

Daraus lässt sich $|\hat{v}(k)| \geq \alpha |k| \cdot |\hat{u}(k)| - \beta |\hat{u}(k)|$ ableiten.
Dieses Ergebnis wollen wir nun für nicht notwendigerweise elliptische Operatoren auf einem Torus verallgemeinern. Dies machen wir zunächst für Operatoren, die auf Schnitten von Trivialbündeln operieren. Wir setzen also voraus, dass D elliptisch über $U \subset T^n$ ist. Vergleichen wir nun D mit dem Operator D_x mit konstanten Koeffizienten, den wir erhalten, indem wir die Koeffizienten von D in einem Punkt $x \in K$ festhalten, so finden wir um jedes $x \in K$ eine kompakte Umgebung K_x, sodass

$$c_x \cdot \|u\|_1 \leq \|u\| + \|Du\|$$

für ein $c_x > 0$ und für alle $u \in L_1^2(K_x, S)$ gilt. Wir nehmen nun eine endliche Familie $\{K_{x_j}\}$ solcher Umgebungen, die K überdeckt, und wählen darauf eine glatte Zerlegung der Eins $\{x_j\}$. Ist $u \in L^2_1(K,S)$, so gilt für alle $c \leq c_{x_j}$ und für alle j die Gleichung

$$\begin{aligned} c\|u\|_1 &= c\|\sum_{j=1}^{N} \varphi_{x_j} u\|_1 \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} c_j \|\varphi_{x_j} u\|_1 \\ &\leq \sum_{j=1}^{N} \|\varphi_{x_j} u\| + \sum_{j=1}^{N} \|D\varphi_{x_j} u\|. \end{aligned}$$

Andererseits gilt $\|\varphi_{x_j} u\| \leq \|u\|$, falls

$$\begin{aligned} \|D\varphi_{x_j} u\| &\leq \|\varphi_{x_j} Du\| + \|[D, \varphi_{x_j}]u\| \\ &\leq \|Du\| + K_j \|u\| \end{aligned}$$

mit $K_j = \|[D, \varphi_{x_j}]\|$ erfüllt ist.
Wir verbinden nun die vorangegangenen Überlegungen. Falls $K \geq K_j$ für alle j gilt, so ist auch

$$c\|u\|_1 \leq N\left((K+1)\|u\| + \|Du\|\right)$$

erfüllt. Halten wir nun c fest, so erhalten wir das gewünschte Ergebnis.

In der allgemeinen Definition der Differentialoperatoren haben wir die lokale Darstellung selbiger kennen gelernt. Ist nun das K aus Definition 5.1.1 in einer einzelnen Karte enthalten, und ist das Bündel S über dieser Karte trivialisiert, so liegt ein Schnitt u genau dann in $L^2_1(K,S)$, wenn der Träger in K liegt und jede distributionelle partielle Ableitung $\frac{\partial u}{\partial x^j}$ quadratintegrabel ist.
Daraus ergibt sich nun, dass die L^2-Normen dieser partiellen Ableitungen zusammen mit der L^2–Norm von u den Raum $L^2_1(K,S)$ mit der Struktur eines Hilbertraums versehen. Wenngleich die Wahl von anderen Koordinaten verschiedene Normen auf $L^2_1(K,S)$ zur Folge hat, ist der untergeordnete topologische Vektorraum gleich. Dadurch können wir auf $L^2_1(K,S)$ viele der gewöhnlichen Auffassungen der Operatortheorie in Bezug auf beschränkte oder kompakte Operatoren anwenden. Ergebnisse, die von der Metrik abhängen, wie beispielsweise Isometrien oder selbstadjungierte Operatoren, können jedoch nicht ohne Weiteres übernommen werden.

Ist D ein symmetrischer, elliptischer Operator auf einer kompakten Mannigfaltigkeit M, so ist $\varphi(D)$ für jedes $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ kompakt. Daraus folgen einige interessante und nützliche Resultate. Ein Beispiel dafür ist folgende Proposition:

Proposition 5.3.6 *[HR00, S. 284, Prop. 10.5.1] Es sei M eine nicht notwendigerweise kompakte Mannigfaltigkeit und D ein wesentlich selbstadjungierter Differentialoperator auf M. Ist D zusätzlich elliptisch auf einer offenen Teilmenge $U \subset M$, so ist der Operator $\rho(g)\varphi(D)\colon L^2(M,S) \to L^2(M,S)$ für jedes $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ und für jedes $g \in C_0(U)$ kompakt.*

Beweis: Wir zeigen diese Aussage für $\varphi(x) = (i+x)^{-1}$, einen Erzeuger von $C_0(\mathbb{R})$. Darüber hinaus nehmen wir an, dass g glatt ist und einen kompakten Träger K hat. Ist u ein Element aus dem Gebiet von $\bar{D}$, und ist g glatt und hat ebenfalls einen kompakten Träger in $K \subset M$, so hat auch der Schnitt $\rho(g)u$ einen kompakten Träger und liegt im maximalen Gebiet von D, und demnach auch im Sobolev-Raum $L^2_1(K,S)$. Nach Garding's Ungleichung bildet das Produkt $\rho(g)\varphi(D)$ den Raum $L^2(M,S)$ stetig auf $L^2_1(K,S)$ ab. Aus Rellichs Lemma folgt nun die Aussage. □

Ebenso erhalten wir folgende Aussage:

Proposition 5.3.7 *[HR00, S. 285, Prop. 10.5.2] Es sei D ein wesentlich selbstadjungierter elliptischer Differentialoperator auf einer offenen Mannigfaltigkeit M. Ist $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$, so ist der Operator $\varphi(D)\colon L^2(M,S) \to L^2(M,S)$ lokal kompakt.*

5.4 Dirac-Operatoren

Die in der Indextheorie vielleicht am weitesten verbreiteten elliptischen Operatoren sind die Dirac-Operatoren, welche im Folgenden näher betrachtet werden sollen.

Wir betrachten eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M,g) mit einer Riemannschen Metrik g, die ein inneres Produkt auf jedem Tangentialraum T_xM für $x \in M$ induziert. Dieses führt auch auf eine Riemannsche Metrik auf dem Kotangentialraum T^*_xM und auf Λ^p_xM.

Definition 5.4.1 [HR00, S. 306, Def. 11.1.1] Es sei (M,g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und S ein glattes, graduiertes hermitsches Vektorraumbündel über M. Ein Dirac-Operator auf S ist ein ungerader, symmetrischer Differentialoperator auf S, dessen Symbol $\sigma(x,\xi)$ für jedes $x \in M$, jeden Kotangentialvektor ξ an x und jedes $u \in S_x$ die Gleichung

$$\sigma(x,\xi)^2 u = -\|\xi\|^2 u \tag{5.4.1}$$

erfüllt.

Bemerkung 5.4.2 [HR00, S. 306] Ist D ein Dirac-Operator mit Symbol $\sigma(x,\xi)$, so folgt aus der Symmetrie und der Graduierung von D, dass $\sigma(x,\xi)$ für jede Wahl von x

und ξ ein schief-adjungierter, ungerader Endomorphismus auf S_x ist. Die Bedingung (5.4.1) impliziert, dass der Endomorphismus für $\xi \neq 0$ invertierbar ist. Deshalb sind Dirac-Operatoren elliptisch.

Da wir häufig nicht von dem Dirac-Operator, sondern vielmehr von seinem Symbol ausgehen, ist es vonnöten, den Begriff eines Dirac-Bündels einzuführen:

Definition 5.4.3 [HR00, S. 306, Def. 11.1.2] Es sei M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit. Ein Dirac-Bündel auf M ist ein graduiertes hermitesches Vektorraumbündel S über M mit einem $\mathbb{R}$-linearen Morphismus von Vektorraumbündeln $T^*M \to \mathrm{End}(S)$, der jedem Kotangentialvektor $\xi \in T_x^*M$ einen schief-adjungierten, ungeraden Endomorphismus $u \mapsto \xi \cdot u$ von S_x zuordnet, dessen Quadrat durch Multiplikation mit $-\|\xi\|^2$ gegeben ist.

Die zuvor beschriebene Struktur ist das Symbol eines Dirac-Operators auf S. Demnach gibt es eine Bijektion zwischen Strukturen auf Dirac-Bündeln auf einem graduierten hermiteschen Bündel S und den Äquivalenzklassen von Dirac-Operatoren auf S. Dabei fassen wir zwei Operatoren als äquivalent auf, wenn sie das gleiche Symbol haben.

Das wohl bekannteste Beispiel eines Dirac-Operators ist der de-Rham-Operator:

Beispiel 5.4.4 [HR00, S. 307, Ex. 11.1.3] Jede glatte Mannigfaltigkeit M der Dimension n hat einen de-Rham-Komplex

$$\Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^n(M).$$

Dabei bezeichnet $\Omega^p(M)$ den Raum der glatten, komplexwertigen p-Formen auf M, und d ist die äußere Ableitung.
Nehmen wir nun an, dass M eine Riemannsche Mannigfaltigkeit ist und S das komplexe äußere Algebra-Bündel $\Lambda^*_{\mathbb{C}}M$, dessen Schnitte komplexwertige Differentialformen auf M sind, so können wir S in Differentialformen auf M mit geradem beziehungsweise ungeradem Grad aufteilen. Ist d die äußere Ableitung, die wir als einen partiellen Differentialoperator erster Ordnung auf S auffassen können, und ist d^* das formale Adjungierte von d, so definiert der de-Rham-Operator $D = d + d^*$ einen Dirac-Operator auf S. Dies folgt aus der Leibnizformel

$$d(f\omega) - f\,d\omega = df \wedge \omega$$

und aus der Eigenschaft

$$\sigma_D(x, \mathrm{d}g)u(x) = ([D, \rho(g)]u)(x),$$

da wir hieraus schlussfolgern können, dass das Symbol von d der Operator E_ξ ist, der sich aus der äußeren Multiplikaiton mit ξ ergibt.
Da das Symbol von d^* das Negative des Adjunigerten des Symbols von d ist, ist das Symbol von D durch die Formel

$$\sigma_D(x,\xi) = E_\xi - E_\xi^*$$

gegeben. Da $(E_\xi - E_\xi^*)^2 = -\|\xi\|^2 \cdot 1$ gilt, ist D tatsächlich ein Dirac-Operator.

5.5 Die Homologie-Klasse eines selbstadjungierten Operators

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, einen Zusammenhang zwischen symmetrischen elliptischen Differentialoperatoren und K-Homologie-Klassen herzustellen.
Damit können wir dann die Konstruktion im Fall von Operatoren auf vollständigen Mannigfaltigkeiten explizit angeben.

In Definition 4.7.2 haben wir bereits eine Definition der Fredholm-Module gesehen. Für das weitere Vorgehen wird sich jedoch eine andere (dazu äquivalente) Definition mit veränderter Notation als geeigneter erweisen.

Im Folgenden sei A eine separable und nicht notwendigerweise unitale C^*-Algebra.

Definition 5.5.1 [HR00, S. 199, Def. 8.1.1] Ein (ungraduierter) Fredholm-Modul über A ist gegeben durch

(i) einen separablen Hilbertraum H,
(ii) eine Darstellung $\rho\colon A \to \mathfrak{B}(H)$ und
(iii) einen Operator F auf H, sodass für alle $a \in A$ die Äquivalenzen

$$\begin{aligned} &(F^2 - 1)\rho(a) \sim 0 \\ &(F - F^*)\rho(a) \sim 0 \\ &F\rho(a) \sim \rho(a)F \end{aligned}$$

modulo kompakter Operatoren erfüllt sind.

Definition 5.5.2 [HR00, S. 205, Def. 8.2.3] Es seien (ρ, H, F) und (ρ, H, F') zwei Fredholm-Module auf dem Hilbertraum H. Ferner sei $(F - F')\rho(a)$ für alle $a \in A$ kompakt. Dann bezeichnen wir F als kompakte Pertubation von F.

Für den weiteren Verlauf dieses Abschnitts setzen wir voraus, dass D ein symmetrischer elliptischer Differentialoperator erster Ordnung ist, der auf Schnitten eines p-multigraduierten glatten Vektorbündels S über einer glatten Mannigfaltigkeit M operiert. Ferner setzen wir voraus, dass D mit dem graduiertem Operator auf S antikommutiert und dass er mit dem multigraduierten Operator auf S kommutiert. Das heißt, D sei ein ungerader und multigraduierter Differentialoperator.
Außerdem sei M vollständig für D im Sinne von Definition 5.2.8, das heißt D ist wesentlich selbstadjungiert.
Unser Ziel ist es, aus D einen p-multigraduierten Fredholm-Modul (ρ, H, F) über der C^*-Algebra $C_0(M)$ zu gewinnen, woraus wir eine Homologieklasse $[D] \in K^{-1}(C_0(M))$ erhalten.

Zunächst betrachten wir $H = L^2(M, S)$ und statten H mit der natürlichen Darstellung ρ von $C_0(M)$ aus, die durch die Operatormultiplikation gegeben ist. Dafür müssen wir F konstruieren. Da D wesentlich selbstadjungiert ist, können wir den Operator $\varphi(D)$ für jede beschränkte Borelfunktion φ auf $\mathbb{R}$ durch Anwendung des Funktionalkalküls auf den Abschluss von D formen. Den Operator F erhalten wir auf diese Weise, indem wir eine geeignete Funktion auf $\mathbb{R}$ wählen.

Definition 5.5.3 [HR00, S. 286, Def. 10.6.1] Eine glatte Funktion $\xi : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ heißt eine normalisierende Funktion, wenn

(i) ξ ungerade ist, das heißt, $\xi(-\lambda) = -\xi(\lambda)$,
(ii) $\xi(\lambda) > 0$ für $\lambda > 0$ und
(iii) $\xi(\lambda) \to \pm 1$ für $\lambda \to \pm\infty$ gilt.

Normalisierende Funktionen spielen in der K-Homologie eine übergeordnete Rolle, da sie es ermöglichen, einen unbeschränkten Operator in einen beschränkten zu konvertieren, ohne dabei die wesentlichen indextheoretischen Eigenschaften von D zu verlieren.
Die normalisierenden Funktionen besitzen zwei für uns wesentliche Eigenschaften.

(a) Zwei normalisierende Funktionen unterscheiden sich durch eine Funktion aus $C_0(\mathbb{R})$.
(b) Für jedes $t > 0$ gibt es eine normalisierende Funktion ξ, für die der Träger der distributionellen Fouriertransformation $\hat{\xi}$ in $(-t, t)$ liegt, und für die $s\hat{\xi}(s)$ eine glatte Funktion ist.

Damit können wir nun folgendes Lemma beweisen.

Lemma 5.5.4 *[HR00, S. 287, Lem. 10.6.2] Es sei D ein unbeschränkter wesentlich selbstadjungierter Operator auf einem Hilbertraum H, und es sei T ein beschränkter Operator,* *der das Gebiet von D erhält. Ferner sei $TD = -DT$ auf dem Gebiet von D. φ sei eine beschränkte Borelfunktion auf $\mathbb{R}$. Dann kommutiert T mit $\varphi(D)$, wenn φ eine gerade Funktion ist, und es antikommutiert, wenn φ ungerade ist.*

Beweisskizze: Zunächst unterteilt man die C^*-Algebra $C_0(\mathbb{R})$ in gerade und ungerade Funktionen. Da

$$T(i \pm D)^{-1} = (i \mp D)^{-1} T$$

gilt, kummutiert T graduiert mit dem resolventen Operator $(i \pm D)^{-1}$. Die resolventen Funktionen $(i \pm x)^{-1}$ erzeugen die C^*-Algebra $C_0(\mathbb{R})$, woraus folgt, dass T mit $\varphi(D)$ für jedes $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$ graduiert kommutiert.
Die Verallgemeinerung auf alle beschränkten Borelfunktionen folgt schließlich aus einem Approximationsargument aus der Topologie.

Für die nächsten beiden Lemmata setzen wir zusätzlich voraus, dass D symmetrisch und M vollständig für D sei.

Lemma 5.5.5 *[HR00, S. 287, Lem. 10.6.3] Es sei D wie in Lemma 5.5.4 gegeben. Zusätzlich sei D elliptisch auf einer offenen Teilmenge U von M. Sind ξ_1 und ξ_2 normalisierende Funktionen, und ist $g \in C_0(U)$, so unterscheiden sich die Operatoren $\xi_1(D)\rho(g)$ und $\xi_2(D)\rho(g)$ nur durch einen kompakten Operator.*

Beweis: Unter Verwendung von $\varphi = \xi_1 - \xi_2$ schreiben wir

$$\xi_1(D)\rho(g) - \xi_2(D)\rho(g) = \varphi(D)\rho(g) = (\rho(\bar{g})\varphi(D))^*.$$

Da $\varphi \in C_0(\mathbb{R})$, folgt aus Proposition 5.3.6, dass $\rho(\bar{g})\varphi(D)$ kompakt ist. □

Für den Beweis des nächsten Lemmas benötigen wir zunächst folgende Aussagen.

Korollar 5.5.6 *[HR00, S. 276, Kor. 10.3.3] Es sei D ein wesentlich selbstadjungierter Differentialoperator auf M. f und g seien beschränkte Funktionen auf M. Ist supp(g) kompakt und supp(f) disjunkt zu supp(g), so existiert ein $\varepsilon > 0$, sodass*

$$\rho(f)e^{isD}\rho(g) = 0$$

für jedes $|s| < \varepsilon$.

Proposition 5.5.7 *[HR00, S. 277, Prop. 10.3.5] Es sei D ein wesentlich selbstadjungierter Differentialoperator auf M. Ist φ eine beschränkte Borelfunktion auf $\mathbb{R}$, deren Fouriertransformation einen kompakten Träger hat, so ist*

$$< \varphi(D)u, v >= \frac{1}{2\pi} \int < e^{isD}u, v > \hat{\varphi}(s)ds$$

für alle $u, v \in C_c^\infty(M, S)$.

Lemma 5.5.8 *[HR00, S. 287, Lem. 10.6.4] Es sei D elliptisch auf einer offenen Teilmenge U von M. Ist ξ eine normalisierende Funktion, und ist $g \in C_0(U)$, so ist der Kommutator $[\xi(D), \rho(g)]$ kompakt.*

Beweis: Es sei U^+ die Einpunktkompaktifizierung von U. Die Darstellung ρ kann zu einer nicht-entarteten Darstellung von $C(U^+)$ auf $H = L^2(M,S)$ erweitert werden. Unter Verwendung von Kasparovs Lemma 4.6.6, reicht es, zu zeigen, dass $\rho(f)\xi(D)\rho(g)$ für zwei stetige Funktionen f, g auf U^+ mit disjunkten Trägern kompakt ist. Eine der beiden Funktionen f oder g hat einen kompakten Träger in U, und ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass es g ist (andernfalls können wir anstelle von $\rho(f)\xi(D)\rho(g)$ das Adjungierte betrachten). Unter Verwendung von Korollar 5.5.6 verschwindet das Produkt $\rho(f)e^{isD}\rho(g)$ für hinreichend kleines s. Ist also der Träger von $\hat{\xi}$ hinreichend klein, so folgt aus Proposition 5.5.7 die Gleichung

$$\rho(f)\xi(D)\rho(g) = 0.$$

Aus Lemma 5.5.5 folgt nun, dass der Operator $\rho(f)\xi(D)\rho(g)$ für jede Wahl von ξ kompakt ist. □

Damit können wir nun die Hauptaussage dieses Kapitels formulieren und beweisen.

Satz 5.5.9 *[HR00, S. 288, Th. 10.6.5] Es sei D ein symmetrischer, p-multigraduierter elliptischer Differentialoperator auf einer glatten Mannigfaltigkeit M. Ferner sei M vollständig für D. Sei $H = L^2(M,S)$ und ρ eine Darstellung von $C_0(M)$ auf H. Dabei sei ρ durch die Operatormultiplikation gegeben. Ist ξ eine normalisierende Funktion, und ist F der Operator $\xi(D)$, so ist das Tripel (ρ, H, F) ein Fredholm-Modul. Darüber hinaus ist die K-Homologie-Klasse $[\rho, H, F] \in K^{-p}(C_0(M))$ unabhängig von der Wahl von ξ.*

Beweisskizze: Zunächst ist F selbstadjungiert. Darüber hinaus ist F nach Lemma 5.5.4 ungerade und multigraduiert. Aus Proposition 5.3.7 folgt, dass der Operator

$$(F^2 - 1)\rho(g)$$

kompakt für jedes $g \in C_0(M)$ ist, da

$$F^2 - 1 = \xi^2(D) - 1$$

und weil $\xi^2 - 1 \in C_0(\mathbb{R})$ gilt.
Nach dem vorangegangenen Lemma 5.5.8 ist der Kommutator $[F, \rho(g)]$ kompakt für jedes $g \in C_0(M)$, womit alle Axiome für einen Fredholm-Modul bewiesen sind. Lemma 5.5.5 zeigt nun, dass die zu zwei verschiedenen normalisierenden Funktionen gehörigen Fredholm-Module kompakte Pertubationen im Sinne von Definition 5.5.2 sind. Damit definieren sie die gleiche K-Homologie-Klasse.

Definition 5.5.10 [HR00, S. 288, Def. 10.6.6] Es sei D ein symmetrischer elliptischer Differentialoperator auf einem p-multigraduierten Bündel S über M, und M sei vollständig für D. Die Homologie-Klasse $[D] \in K^{-p}(C_0(M))$ ist nach Definition die Klasse des Fredholm-Moduls (ρ, H, F), wobei F der Operator $\xi(D)$ ist, der aus einer normalisierenden Funktion ξ entsteht, und ρ und H wie oben seien.

6 Anwendungen in der groben Geometrie

In diesem Kapitel wollen wir die Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel zusammenführen, um einige nützliche Anwendungen und weitere Eigenschaften der K-Theorie- und der K-Homologie-Gruppen zu sehen.

Zwei wesentliche Erkenntnisse dieses Kapitels sind die Aussage und der Beweis der Paschke-Dualität, sowie die Tatsache, dass die K-Theorie-Klassen bestimmter C^*-Algebren verschwinden.

6.1 Die Paschke-Dualität

Die Paschke-Dualität macht eine Aussage über die Isomorphie zwischen der K-Theorie der Quotienten-C^*-Algebra und der topologischen K-Homologie des untergeordneten Raumes.

In Kapitel 4.7 haben wir, ausgehend von den C^*-Algebren $\mathfrak{D}^*(X)$ der pseudolokalen Operatoren und $\mathfrak{C}^*(X)$ aller lokal kompakten Operatoren, die K-Homologie nach Kasparov eingeführt. Dabei sind die C^*-Algebren gewissermaßen eine Verallgemeinerung der in den anderen Kapiteln dieser Arbeit betrachteten entsprechenden Algebren der kontrollierbaren Operatoren, die Teilmengen ebendieser C^*-Algebren $\mathfrak{D}^*(X)$ und $\mathfrak{C}^*(X)$ bilden.

Notation 6.1.1 [Roe96, S. 38] Es sei $D^*(X)$ die C^*-Algebra der Operatoren auf H_X, die durch diejenigen Operatoren aus $\mathfrak{D}^*(X)$ erzeugt wird, die eine endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit haben.

Wie wir in Lemma 3.1.16 gesehen haben, ist $K_p(C^*(X))$ funktorial unter groben Abbildungen. Auf eine ähnliche Weise erhält man die analoge Aussage für $K_p(D^*(X))$. In diesem Fall benötigt man aber zusätzlich die Stetigkeit der groben Abbildungen.

Für die Aussage und den Beweis der Paschke-Dualität benötigen wir folgende Lemmata.

Lemma 6.1.2 *[HR00, S. 7, Prop. 1.2.3] Ist $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ eine Folge von positiven Operatoren, die zusätzlich*

$$\sup_n \|T_1 + \ldots + T_n\| < \infty$$

erfüllen, so konvergiert die unendliche Summe $\sum\limits_j T_j$ in der starken Operatortopologie.

Beweis: Es sei $v \in H$. Dann hat die Reihe

$$\sum_j < T_j v, v >$$

nur nicht-negative Terme und uniform beschränkte Partialsummen. Daher ist sie konvergent. Wenden wir nun die Ungleichung

$$\|Tv\|^2 \leq \|T^{\frac{1}{2}}\|^2 \|T^{\frac{1}{2}}\|^2 = \|T\| \cdot < Tv, v >$$

auf $T = \sum_{j=M}^{N} T_j$ an, so sehen wir, dass die Partialsummen von $\sum_j T_j v$ eine Cauchy-Folge in H bilden und demnach konvergieren.

□

Lemma 6.1.3 *[HR00, S. 353, Sublem. 12.3.3] Es sei $\{U_n\}$ eine lokal endliche, uniform beschränkte offene Überdeckung von X, und $\{g_n\}$ eine Zerlegung der Eins. Darüber hinaus sei $T \in \mathfrak{B}(H)$ ein beschränkter Operator. Dann konvergiert die Reihe*

$$trunc(T) = \sum_n \rho(g_n)^{\frac{1}{2}} T \rho(g_n)^{\frac{1}{2}}$$

stark gegen einen kontrollierbaren Operator auf H. Außerdem ist die Abbildung

$$trunc \colon \mathfrak{B}(H) \to \mathfrak{B}(H)$$

linear und stetig in der Norm.

Beweis: Es sei T ein positiver Operator und T_k durch die Gleichung

$$T_k = \sum_{n=1}^{k} \rho(g_n)^{\frac{1}{2}} T \rho(g_n)^{\frac{1}{2}}$$

gegeben. Dann ist für jedes $v \in H$ aufgrund der Linearität des Skalarprodukts

$$
\begin{aligned}
< T_k v, v > &= < \sum_{n=1}^{k} \rho(g_n)^{\frac{1}{2}} T \rho(g_n)^{\frac{1}{2}} v, v > \\
&= \sum_{n=1}^{k} < T\rho(g_n)^{\frac{1}{2}} v, \rho(g_n)^{\frac{1}{2}} v > \\
&\leq \|T\| \sum_{n=1}^{k} \|\rho(g_n)^{\frac{1}{2}} v\|^2 \\
&\leq \|T\| \cdot \|v\|^2.
\end{aligned}
$$

Dies impliziert $\|T_k\| \leq \|T\|$ für jedes k. Damit folgt nun aus Lemma 6.1.2, dass die Reihe, die $\mathrm{trunc}(T)$ definiert, stark gegen einen positiven Operator konvergiert, und dass $\|\mathrm{trunc}(T)\| \leq \|T\|$. Da der Träger von $\mathrm{trunc}(T)$ zudem in $\bigcup U_n \times U_n$ liegt, ist der Operator nach Definition kontrollierbar. □

Damit können wir nun die Aussage der Paschke-Dualität formulieren und beweisen.

Satz 6.1.4 (Paschke-Dualität) *[HR00] Es sei X ein lokal kompakter Raum, der mit einer eigentlichen groben Struktur ausgestattet ist. Ferner gebe es eine nicht-entartete Darstellung von $C_0(X)$ auf einem Hilbertraum H. Dann gilt:*

(i) Die Inklusion von $D^*(X)$ in $\mathfrak{D}^*(X)$ induziert einen Isomorphismus

$$D^*(X)/C^*(X) \cong \mathfrak{D}^*(X)/\mathfrak{C}^*(X)$$

(ii) Ist die Darstellung von $C_0(X)$ zusätzlich ampel, so gibt es einen Isomorphismus

$$K_{p+1}(D^*(X)/C^*(X)) \cong K_p(X).$$

Beweis: Um zu zeigen, dass die Inklusion von $D^*(X)$ in $\mathfrak{D}^*(X)$ einen Isomorphismus auf den Quotientenalgebren induziert, müssen wir zeigen, dass

$$C^*(X) = D^*(X) \cap \mathfrak{C}^*(X),$$

da dies die Injektivität der induzierten Abbildung impliziert, und dass die Gleichung

$$\mathfrak{D}^*(X) = D^*(X) + \mathfrak{C}^*(X)$$

gilt. Die erste Gleichung folgt aus den Definitionen.
Für die zweite Gleichung betrachten wir das vorangegangene Lemma. Da die grobe Struktur nach Voraussetzung eigentlich ist, gibt es eine Zerlegung der Eins, welche

die gewünschten Eigenschaften hat. Damit sind die Voraussetzungen für 6.1.3 erfüllt. Es sei nun $T \in \mathfrak{D}^*(X)$. Dann ist

$$\begin{aligned} T^* - T &= \sum_n \rho(g_n)^{\frac{1}{2}}[T, \rho(g_n)^{\frac{1}{2}}] \\ &= -\sum_n [T, \rho(g_n)^{\frac{1}{2}}]\rho(g_n)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Demnach sind für jede Funktion mit kompaktem Träger f auf X sowohl $\rho(f) \cdot (T' - T)$ als auch $(T - T') \cdot \rho(f)$ endliche Summen kompakter Operatoren, und deshalb kompakt.
Damit folgt nun, dass $T' - T$ lokal kompakt ist.
Der zweite Teil des Beweises folgt aus Definition 4.7.5 der K-Homologie-Gruppen.

□

6.2 Der grobe Index

Im weiteren Verlauf des Kapitels setzen wir nun voraus, dass X ein lokal kompakter Raum ist, der mit einer eigentlichen groben Struktur ausgestattet ist. Ferner gebe es eine ample Darstellung von $C_0(X)$ auf einem Hilbertraum H. Wir betrachten nun die zu der kurzen exakten Sequenz von C^*-Algebren

$$0 \to C^*(X) \to D^*(X) \to D^*(X)/C^*(X) \to 0 \tag{6.2.1}$$

gehörige exakte K-Theorie-Sequenz. Durch die Paschke-Dualität folgt, dass die Rand-Abbildung, die in dieser Sequenz vorkommt, als ein Homomorphismus

$$A\colon K_p(X) \to K_p(C^*(X))$$

zwischen der K-Homologie des Raumes X in die K-Theorie der groben C^*-Algebra aufgefasst werden kann.
Dies rechtfertigt die folgende Definition.

Definition 6.2.1 [HR00, S. 354, Def. 12.3.5] Der auf diese Weise gewonnene Homomorphismus $A\colon K_p(X) \to K_p(C^*(X))$ heißt grobe Assembly-Abbildung bezüglich X. Ist X eine Mannigfaltigkeit und D ein symmetrischer, elliptischer Operator auf X, so bezeichnen wir die Klasse $A[D] \in K_p(C^*(X))$ als groben Index von D.

Zur Veranschaulichung betrachten wir folgendes Beispiel:

Beispiel 6.2.2 [HR00, S. 355, Ex. 12.3.6] Es sei X kompakt. Dann ist X grob äquivalent zu einem Punkt und $C^*(X)$ stimmt mit der Algebra $\mathfrak{k}(H)$ der kompakten Operatoren auf H überein. Die Assembly-Abbildung $K_0(X) \to K_0(\mathfrak{k}(H)) \cong \mathbb{Z}$ stimmt mit der Indexabbildung $K_0(X) \to K_0(\{\text{Punkt}\}) \cong \mathbb{Z}$ überein, die wir erhalten, wenn wir X in einen Punkt zusammenziehen. Der grobe Index eines elliptischen Operators D auf einer kompakten Menge X ist demnach der bereits bekannte topologische Index.

Ohne Beweis geben wir folgende Proposition an, die eine Aussage darüber macht, dass der grobe Index im Falle positiver Skalarkrümmung verschwindet:

Proposition 6.2.3 *[HR00, S. 355, Prop. 12.3.7] Es sei X eine vollständige n-dimensionale Riemannsche Spin-Mannigfaltigkeit mit der assoziierten metrischen groben Struktur. Es bezeichne $[X]$ die Fundamentalklasse von X in $K_n(X)$. Hat X zudem uniform positive Skalarkrümmung, so ist $A[X] = 0 \in K_p(C^*(X))$.*

6.3 Äquivariante Assembly-Abbildung

Im Folgenden betrachten wir eine glatte kompakte Mannigfaltigkeit M mit der Fundamentalgruppe G. Es sei $X = \tilde{M}$ die universelle Überdeckung von M.
Dann können wir X mit einer kanonischen metrischen groben Struktur ausstatten, die durch eine G-invariante Riemannsche Metrik erzeugt wird[1)]. Wir nehmen an, dass die Algebren $C^*(X)$ und $D^*(X)$ von dieser groben Struktur und der amplen Darstellung von $C_0(X)$, die durch die Operatormultiplikation auf

$$H = \bigoplus^{\infty} L^2(X) = L^2(X) \oplus L^2(X) \oplus \cdots$$

gegeben ist, gebildet werden. G operiert durch die Translation auf H, was auch mit der Darstellung von $C_0(X)$ kompatibel ist, weshalb G via Automorphismen auch auf $C^*(X)$ und $D^*(X)$ operiert.

Notation 6.3.1 [HR00, S. 363, Def. 12.5.1] Es bezeichne $C^*_G(X)$ die Unteralgebra von $C^*(X)$, die durch die G-invarianten lokal kompakten kontrollierten Operatoren erzeugt wird.
Analog bezeichne $D^*_G(X)$ die Unteralgebra von $D^*(X)$, die durch die G-invarianten pseudolokalen kontrollierten Operatoren erzeugt wird.

Wir betrachten nun die kurze exakte Sequenz von C^*-Algebren

$$0 \to C^*_G(X) \to D^*_G(X) \to D^*_G(X)/C^*_G(X) \to 0. \tag{6.3.1}$$

[1)]Dass diese metrische grobe Struktur unabhängig von der Wahl der Metrik und damit wohldefiniert ist, kann in [HR00, S. 350, Prop. 12.2.2] nachgelesen werden.

Dann gibt es einen Isomorphismus von der K-Theorie von $C^*_G(X)$ in die K-Theorie der reduzierten Gruppen-C^*-Algebra.

Lemma 6.3.2 *[HR00, S. 364, Lem. 12.5.3 und Lem. 12.5.4] Es gilt*

$$K_p(C^*_G(X)) \cong K_p(C^*_r(G))$$

sowie

$$K_{p+1}\left(D^*_G(X)/C^*_G(X)\right) \cong K_p(M).$$

Dabei bezeichne $K_p(M)$ die K-Homologie des kompakten Raumes $M = X/G$.

Beweisskizze: Zunächst beweist man die Existenz des ersten Isomorphismus.
Dazu wählt man ein kompaktes fundamentales Gebiet D für die Aktion von G auf X. Dann ist

$$X = \bigcup_{g\in G} gD,$$

weshalb auch

$$L^2(X) = \bigoplus_{g\in G} L^2(gD) = \ell^2(G)\otimes L^2(D)$$

gilt. Dabei wirkt G durch die reguläre Darstellung auf $\ell^2(G)$ und durch die triviale Darstellung auf $L^2(D)$. Demnach ist $H = \ell^2(G)\otimes L$ mit $L = \bigoplus^\infty L^2(D)$. Unter Verwendung des Tensorprodukts definiert man nun einen injektiven $*$-Homomorphismus

$$\alpha\colon C^*_r(G)\otimes \mathfrak{k}(L) \to \mathfrak{B}(H).$$

Das Bild von α entspricht dabei der Algebra $C^*_G(X)$.
Es bezeichne nun $\mathbb{C}[G]\odot\mathfrak{k}(L)$ das algebraische Tensorprodukt von der Gruppenalgebra $\mathbb{C}[G]$ mit den kompakten Operatoren auf L. Auf diese Weise entspricht das Tensorprodukt $\alpha(\mathbb{C}[G]\odot\mathfrak{k}(L))$ der Algebra der G-invarianten, kontrollierbaren, lokal kompakten Operatoren auf H. $\alpha(\mathbb{C}[G]\odot\mathfrak{k}(L))$ ist eine dichte Unteralgebra von $C^*_G(X)$ und $\alpha\colon C^*_r(G)\otimes\mathfrak{k}(L)\to C^*_G(C)$ ist ein Isomorphismus zwischen den C^*-Algebren. Man kann nun zeigen, dass der K-Theorie-Isomorphismus unabhängig von der Wahl des fundamentalen Gebiets ist. Damit folgt schließlich aus der Stabilität der K-Theorie als Resultat des Beispiels 2.2.6 das gewünschte Ergebnis.
Für den zweiten Teil des Lemmas zeigt man zunächst, dass $D^*_G(X)/C^*_G(X)$ isomorph zur Algebra $D^*(M)/C^*(M)$ ist, deren K-Theorie nach der Paschke-Dualität 6.1.4 der K-Homologie von M entspricht. Es sei $\pi\colon X\to M$ die überdeckende Projektion. Dann

gibt ein $\delta > 0$, sodass $\pi^{-1}(U) = U \times G$ für eine beliebige offene Menge U mit Durchmesser diam $U < \delta$, gilt. Demnach gibt es eine Bijektion zwischen Operatoren auf $L^2(M)$, deren Träger in $U \times U$ liegt, und den G-invarianten Operatoren auf $L^2(X)$, deren Träger in $\pi^{-1}(U) \times \pi^{-1}(U)$ liegen.
Jeder Operator auf $L^2(M)$, dessen Ausbreitungsgeschwindigkeit kleiner als $\frac{\delta}{2}$ ist, kann als endliche Summe von Operatoren geschrieben werden, deren Träger in $U \times U$ liegen, wobei U wie zuvor einen Durchmesser diam $U < \delta$ hat. Außerdem kann jeder dieser Operatoren nach X geliftet werden. Auf diese Weise erhalten wir eine Bijektion zwischen den Operatoren auf M mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $< \frac{\delta}{2}$ und den G-invarianten Operatoren auf X mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $< \frac{\delta}{2}$. Darüber hinaus erhält diese Bijektion die Eigenschaften der Pseudolokalität und der lokalen Kompaktheit.
Nun betrachtet man die Quotientenalgebra $D_G^*(X)/C_G^*(X)$. Das Rundungsargument aus dem Beweis von Lemma 6.1.4 zeigt, dass die Äquivalenzklasse $[T]$ in dieser Quotientenalgebra durch einen gerundeten Operator $[\mathrm{trunc}(T)]$ dargestellt werden kann, wobei sich die Rundung auf eine lokal endliche Zerlegung der Eins $\{g_n\}$ auf X bezieht. Diese Zerlegung ist dabei wie folgt gegeben:
Zunächst werde M durch endlich viele offene Mengen mit $\{U_i\}$ vom Durchmesser diam $U_i < \frac{\delta}{2}$ überdeckt. Dann wählt man eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins von M und liftet diese zu einer G-invarianten Zerlegung der Eins auf X unter Verwendung der Gleichung

$$\pi^{-1}(U_i) = U_i \times G.$$

Für $T \in D_G^*(X)$ liegt also $\mathrm{trunc}(T)$ in $D_G^*(X)$ und hat auch eine Ausbreitungsgeschwindigkeit $< \frac{\delta}{2}$. Außerdem liegt die Differenz $T - \mathrm{trunc}(T)$ in $C_G^*(X)$. Somit ist gezeigt, dass jede Äquivalenzklasse in der Quotientenalgebra $D_G^*(X)/C_G^*(X)$ durch einen Operator mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $< \frac{\delta}{2}$ dargestellt werden kann.
Analog kann jede Klasse in $D^*(M)/C^*(M)$ durch einen Operator mit Ausbreitungsgeschwindigkeit $< \frac{\delta}{2}$ dargestellt werden.
Insgesamt erhält man also eine Bijektion zwischen $D^*(M)/C^*(M)$ und $D_G^*(X)/C_G^*(X)$, welches ein Isomorphismus von Algebren ist.

Wir betrachten nun die Randabbildung, die zur Erweiterung (6.3.1) in der sechstermigen K-Theorie-Sequenz gehört. Das vorangegangene Lemma liefert eine Möglichkeit, diese Randabbildung mit dem Homomorphismus

$$A_M \colon K_p(M) \to K_p(C_r^*(\pi_1(M)))$$

von der K-Homologie von M in die K-Theorie der C^*-Algebra ihrer Fundamentalgruppe zu identifizieren.
Dies rechtfertigt folgende Definition:

Definition 6.3.3 [HR00, S. 364, Def. 12.5.5] Den Homomorphismus A_M bezeichnen wir als (äquivariante) Assembly-Abbildung des Raumes M.

Die Assembly-Abbildung $A_M \colon K_p(M) \to K_p(C_r^*(\pi_1(M)))$ ist für die Topologie von großer Bedeutung. Unter anderem bildet sie die Grundlage für die analytische Novikov Vermutung. Ein spezieller Fall der Vermutung ist folgender:

Vermutung 6.3.4 *[HR00, S. 365, Conj. 12.5.6] Ist M asphärisch*[2)]*, so ist die zugehörige Assembly-Abbildung A_M injektiv.*

Bemerkung 6.3.5 Es wird sogar vermutet, dass A_M im ashärischen Fall ein Isomorphismus ist.

6.4 Skalierbare Räume

Für bestimmte Arten von metrischen Räumen X ist die Assembly-Abbildung ein Isomorphismus. Die folgenden Definitionen und Resultate benötigen wir zur Klassifikation dieser Räume.

Lemma 6.4.1 *[HR00, S. 357, Lem. 12.4.1] Es sei X ein metrischer Raum. Dann ist die grobe Assembly-Abbildung genau dann ein Isomorphismus, wenn alle K-Theorie-Gruppen der Algebra $D^*(X)$ trivial sind.*

Beweis: Dies folgt aus der exakten Sequenz der K-Theorie-Gruppen, die zu der kurzen exakten Sequenz (6.2.1) der C^*-Algebren gehört. □

Um dies zu verallgemeinern, betrachten wir im Folgenden oftmals uniforme Abbildungen, die wie folgt definiert sind:

Definition 6.4.2 [HR00, S. 357, Def. 12.4.2] Eine uniforme Abbildung zwischen zwei eigentlichen metrischen Räumen ist eine grobe Abbildung, die zusätzlich stetig ist.

Bemerkung 6.4.3 Man kann Definition 6.4.2 auch allgemeiner für lokal kompakte, eigentliche grobe Räume formulieren. Für unsere Zwecke ist die oben angeführte Definition aber ausreichend.

Definition 6.4.4 [HR00, S. 357, Def. 12.4.3] Es seien X und Y eigentliche metrische Räume und $C_0(X)$ und $C_0(Y)$ seien nicht-entartet auf Hilberträumen H_X bzw. H_Y dargestellt. Ferner sei $f \colon X \to Y$ eine uniforme Abbildung. Dann sagen wir, eine Isometrie $V \colon H_X \to H_Y$ überdeckt f uniform, wenn V die Abbildung f im Sinne von Definition 3.3.7 überdeckt und zudem V die Abbildung $f^* \colon (C_0(Y)) \to C_0(X)$ im Sinne von Definition 3.3.9 überdeckt.

[2)] M heißt asphärisch, wenn die universalen Überdeckungen von M kontrahierbar sind.

Für uniform überdeckende Abbildungen gilt folgendes Lemma:

Lemma 6.4.5 *[HR00, S. 357 f., Lem. 12.4.4] Es sei $V: H_X \to H_Y$ eine Isometrie, die die uniforme Abbildung $f: X \to Y$ uniform überdeckt. Dann bildet der $*$-Homomorphismus $Ad_V(T) = VTV^*$ $D^*(X)$ auf $D^*(Y)$ ab. Darüber hinaus ist der Homomorphismus auf der K-Theorie, der durch Ad_V induziert wird, unabhängig von der Wahl von V.*

Bislang ist jedoch noch nicht klar, dass es solche überdeckenden Isometrien gibt. Wie sich später zeigen wird, ist es dafür sinnvoll, zu fordern, dass die betrachteten Darstellung in folgendem Sinne sehr ampel sind:

Definition 6.4.6 [HR00, S. 358, Def. 12.4.5] Es sei $\rho: C_0(X) \to \mathfrak{B}(H_X)$ eine Darstellung. Wir sagen, ρ ist sehr ampel, wenn die Darstellung unitär äquivalent zu einer direkten Summe von endlich vielen Kopien einer festen amplen Darstellung ist.

Definition 6.4.7 [HR00, S. 358, Def. 12.4.7] Es sei X eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann heißt X skalierbar, wenn es eine Abbildung $r: X \to X$, die uniform ist, einen metrischen Unterraum $Z = \{(x,t) : 0 \leq t \leq T_X\}$ von $X \times \mathbb{R}$ mit einer stetigen Funktion $\Phi: X \to [0,\infty), x \mapsto T_x$, und eine uniforme Abbildung $h: Z \to X$ gibt, sodass

(i) $d(r(x), r(x')) \leq \frac{1}{2} d(x,x')$ für alle $x, x' \in X$,
(ii) $h(x,0) = x$ und
(iii) $h(x,T_x) = r(x)$.

erfüllt sind.

Ohne Beweis geben wir folgendes Lemma an. Der Beweis findet sich beispielsweise in [HR00].

Proposition 6.4.8 *[HR00, S. 361, Prop. 12.4.12] Es sei X eine vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit und $r: X \to X$ eine uniforme Abbildung. Ferner gebe es einen metrischen Unterraum $Z = \{(x,t) : 0 \leq t \leq T_x\} \subset X \times \mathbb{R}$ mit einer stetigen Funktion $x \mapsto T_x$ von X nach $[0,\infty)$ und eine uniforme Abbildung $h: Z \to X$, sodass*

(i) $h(x,0)) = x$
(ii) $h(x,T_x) = r(x)$.

Dann ist $r_* = id: K_p(D^*(X)) \to K_p(D^*(X))$.

Mit der vorangegangenen Definition können wir nun angeben, wann die grobe Assembly-Abbildung ein Isomorphismus ist.

Satz 6.4.9 *[HR00, S. 358, Th. 12.4.11] Es sei X eine skalierbare, vollständige Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist die grobe Assembly-Abbildung $A: K_p(X) \to K_p(C^*(X))$ ein Isomorphismus.*

Beweis: Nach Lemma 6.4.1 reicht es, zu zeigen, dass $K_p(D^*(X)) = 0$ ist.
Dazu sei $r\colon X \to X$ eine Kontraktion von X wie in Definition 6.4.7. Nach Proposition 6.4.8 reicht es darüber hinaus aus, zu zeigen, dass

$$r_* = 0\colon K_p(D^*(X)) \to K_p(D^*(X)).$$

Zunächst nehmen wir an, dass r eine Bijektion ist. Im Folgenden werden wir die induzierte Abbildung r_* explizit angeben, indem wir den Hilbertraum H_X auf eine bestimmte Weise wählen. Dafür sei Λ zunächst eine abzählbare, dichte Teilmenge von X, die invariant unter r ist, und es sei

$$H = \bigoplus^{\infty} \ell^2(\Lambda).$$

Dann ist H eine sehr ample Darstellung von $C_0(X)$. Wir wählen nun eine Isometrie f auf $\ell^2(\Sigma)$, indem wir den Basisvektor, der zu $x \in \Sigma$ gehört, auf den Basisvektor abbilden, der zu $f(x)$ gehört. Dies ist möglich, da f bijektiv ist. Betrachten wir nun die direkte Summe unendlich vieler Kopien dieser Isometrie, so erhalten wir eine Isometrie $V: H \to H$, die f uniform überdeckt.
Im Folgenden bezeichne $H' = H \oplus H \oplus \ldots$ die direkte Summe unendlich vieler Kopien von H und es sei $V_1\colon H \to H'$ die Isometrie, die H als ersten Summanden in H' einbindet. Dann bildet $\alpha_1 = \mathrm{Ad}_{V_1}$ die Algebra $D^*(X,H)$ auf $D^*(X,H')$ ab, und da V_1 die Abbildung r uniform überdeckt, können wir den Homomorphismus

$$(\alpha_1)_* = (\mathrm{Ad}_{V_1})_*\colon K_p(D^*(X,H)) \to K_p(D^*(X,H'))$$

mit r_* identifizieren.
Nun werden wir ein Eilenberg Swindle verwenden, um zu beweisen, dass $(\alpha_1)_*$ der Nullabbildung auf der K-Theorie entspricht. Dafür definieren wir zunächst einen weiteren $*$-Homomorphismus $\alpha_2\colon \mathfrak{B}(H) \to \mathfrak{B}(H)$, der durch

$$\alpha_2(T) = (0, \mathrm{Ad}_V(T), \mathrm{Ad}_V^2(T), \ldots)$$

gegeben ist. Um zu zeigen, dass für $T \in D^*(X,H)$ auch $\alpha_2(T) \in D^*(X,H')$ gilt, sei T ein kontrollierbarer und pseudolokaler Operator. Dann ist $\alpha_2(T)$ kontrollierbar, da f die Abstände verringert. Wir müssen also zeigen, dass $\alpha_2(T)$ pseudolokal ist. Dafür nutzen wir Kasparovs Lemma 4.6.6. Demnach ist es ausreichend, zu zeigen, dass $f\alpha_2(T)g \cong 0$ für $f,g \in C_0(X)$, wenn die Träger der beiden Abbildungen disjunkt sind. Da T nach Voraussetzung kontrollierbar ist, existiert eine Konstante $R > 0$, sodass $fTg = 0$ für $\mathrm{d}(\mathrm{supp}(f), \mathrm{supp}(g)) > R$ gilt. Da r die Abstände halbiert, gilt zudem $f\mathrm{Ad}_V^k(T)g = 0$, falls $2^{-k}R < \mathrm{d}(\mathrm{supp}(f), \mathrm{supp}(g))$. Also ist der Operator

$$f\alpha_2(T)g = (0, f\mathrm{Ad}_v(T)g, f\mathrm{Ad}_V^2(T)g, \ldots)$$

eine endliche Summe kompakter Operatoren und dadurch selber kompakt.
Mit dieser Beobachtung können wir den Beweis unter Verwendung des Eilenberg Swindles nun wie bereits zuvor in Lemma 3.4.3 beenden:
Wir erhalten $\alpha_2 = \mathrm{Ad}_W \circ (\alpha_1 + \alpha_2)$, wobei W eine Isometrie sei, die r uniform überdeckt. Dann erhalten wir auf den K-Theorie-Klassen die Gleichung

$$(\alpha_2)_* = (\alpha_1)_* + (\alpha_2)_*,$$

woraus $(\alpha_1)_* = 0$ folgt.
Es bleibt der Fall zu betrachten, dass r nicht notwendigerweise bijektiv ist. In diesem Fall ersetzen wir $\ell^2(\Sigma)$ durch $\ell^2(\Sigma \times A)$, wobei A eine abzählbare Menge ist, und definieren dann die Isometrie auf $\ell^2(\Sigma \times A)$ durch die Abbildung des Basisvektors (x, a) auf den Basisvektor $(r(x), a')$, wobei a' so gewählt sei, dass die Abbildung bijektiv auf den Basisvektoren ist. Dann können wir den Beweis wie zuvor führen. □

Mit diesen Vorüberlegungen können wir nun einen sehr wichtigen Satz beweisen.

Satz 6.4.10 *[Sch, S. 9, Prop. 2.10] Es sei X ein metrischer Raum. Dann sind*

$$K_p(C^*(X \times [0,\infty))) \text{ und } K_p(D^*(X \times [0,\infty)))$$

trivial.

Beweis: Den Beweis, dass $K_p(C^*(X \times [0,\infty))) = 0$ gilt, haben wir bereits in Lemma 3.4.3 erbracht. Zu zeigen bleibt die Aussage also für $K_p(D^*(X \times [0,\infty)))$.
Zur vereinfachten Notation sei $Y := X \times [0,\infty)$.
Wir betrachten die uniforme Abbildung $r\colon Y \to Y$, die durch

$$(x, s) \mapsto (x, s+1)$$

gegeben ist. Um Proposition 6.4.8 anwenden zu können, müssen wir zunächst die Voraussetzungen überprüfen. Dazu betrachten wir die Menge

$$Z = \{(x,t) : 0 \leq t \leq T_x \equiv 1\} \subseteq Y \times \mathbb{R}.$$

Die Abbildung $x \mapsto T_x = 1$ ist stetig und $Z = Y \times [0,1] = X \times [0,\infty) \times [0,1]$. Wir definieren auf Z nun die Abbildung $h\colon Z \to X$ durch

$$(y, s, t) \mapsto (y, s+t).$$

Diese erfüllt $h(x,s,0) = (x,s)$ und $h(x,s,T_x) = h(x,s,1) = (x,s+1) = r(x)$. Mit Proposition 6.4.8 folgt also, dass r_* als Abbildung

$$r_*\colon K_p(D^*(Y)) \to K_p(D^*(Y))$$

auf der K-Theorie der Identität entspricht.
Im nächsten Beweisschritt wollen wir nun zeigen, dass r_* der Nullabbildung entspricht.
Dazu gehen wir wie im Beweis von Satz 6.4.9 vor. Wir betrachten eine abzählbar unendliche Menge A und den Funktionenraum $\ell^2(\Sigma \times A)$ für eine abzählbare dichte Teilmenge Σ von X, auf der r invariant ist. Wie zuvor sei $H = \bigoplus^\infty \ell^2(\Sigma \times A)$ und ρ eine sehr ample Darstellung von $C_0(X)$ auf H. Wir definieren nun, wie im Beweis zuvor, die Isometrie f auf $\ell^2(\Sigma \times A)$ durch die Vorschrift, dass (x,a) für ein geeignetes $a' \in A$ auf das 2-Tupel $(r(x),a')$ abgebildet wird, sodass die Abbildung bijektiv auf den Basisvektoren ist.
Im Folgenden betrachten wir die direkte Summe unendlich vieler Kopien dieser Isometrie und erhalten auf diesem Weg eine Isometrie $V\colon H \to H$, die f uniform überdeckt.
Es sei nun $H' = H \oplus H \oplus H \oplus \ldots$ und $V_1\colon H \to H'$ die Isometrie, die H als ersten Summanden in H' einbindet, das heißt, $f \mapsto (f,0,0,\ldots)$. Dass V_1 die Identität überdeckt, haben wir bereits in Lemma 3.4.3 bewiesen. Also überdeckt V_1 die Abbildung r_*, die nach Proposition 6.4.8 mit der Identität übereinstimmt. Nach Lemma 6.4.5 bildet die Abbildung Ad_V die Algebra $D^*(X,H)$ auf $D^*(X,H')$ ab. Da V_1 die Abbildung r_* überdeckt, können wir

$$(\alpha_1)_* = (\mathrm{Ad}_{V_1})_*\colon K_p(D^*(X,H)) \to K_p(D^*(X,H'))$$

mit r_* identifizieren.
Ein Eilenberg Swindle zeigt nun, dass $r_* = 0$ gilt. Dazu betrachten wir den $*$-Homomorphismus $\alpha_2\colon \mathfrak{B}(H) \to \mathfrak{B}(H')$, der durch

$$\alpha_2(T) = (0, \mathrm{Ad}_V(T), \mathrm{Ad}_V^2(T), \ldots)$$

gegeben ist. Um zu zeigen, dass für $T \in D^*(X,H)$ auch $\alpha_2(T) \in D^*(X,H')$ gilt, sei T kontrollierbar und pseudolokal. Da f als Kontraktion die Abstände verringert, ist $\alpha_2(T)$ kontrollierbar. Zu zeigen bleibt also, dass $\alpha_2(T)$ pseudolokal ist. Mit Kasparovs Lemma 4.6.6 folgt, dass es ausreicht, wenn wir zeigen, dass $f\alpha_2(T)g \sim 0$ für zwei Funktionen $f,g \in C_0(X)$ mit disjunkten Trägern gilt. Da T kontrollierbar ist, existiert eine Konstante $R > 0$, sodass $fTg = 0$ für Funktionen f,g mit $\mathrm{d}(\mathrm{supp}(f),\mathrm{supp}(g)) > R$ gilt. Da r eine Kontraktion ist, halbiert die Abbildung die Abstände. Dadurch ist

$$f\mathrm{Ad}_{V_1}^k(T)g = 0$$

für $2^{-k}R < \mathrm{d}(\mathrm{supp}(f),\mathrm{supp}(g))$.
$f\alpha_2(T)g = (0, f\mathrm{Ad}_V(T)g, \ldots)$ ist also eine endliche Summe kompakter Operatoren und deshalb kompakt.
Um den Beweis zu beenden, betrachten wir nun wie in Lemma 3.4.3 eine Isometrie

W, die r uniform überdeckt. Aus Lemma 2.4.12 folgt, dass Ad_W die Identität auf der K-Theorie induziert. Damit erhalten wir

$$\alpha_2 = \mathrm{Ad}_W(\alpha_1 + \alpha_2)$$

und schließlich

$$(\alpha_2)_* = (\alpha_1)_* + (\alpha_2)_*.$$

Insgesamt ist also $\alpha_1 = 0 = r^*$. □

Beispiel 6.4.11 Unter Verwendung des vorangegangenen Satzes, der Paschke-Dualität und der sechs-termigen exakten Sequenz (2.7.1) als Resultat der Bott-Periodizität kann man die K-Theorie- und K-Homologie-Gruppen für endliche Kegel berechnen. Sei dazu W ein simplizialer Komplex. Wir betrachten den endlichen Kegel $X = C(W)$ über W, also $W \times [0,1] \setminus W \times \{0\}$. Die exakte Sequenz (2.7.1) führt dann mit $J = C^*(X)$ und $A = D^*(X)$ auf folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
K_1(C^*(X)) \arrow[r] & K_1(D^*(X)) \arrow[r] & K_1(D^*(X)/C^*(X)) \arrow[d] \\
K_0(D^*(X)/C^*(X)) \arrow[u] & K_0(D^*(X)) \arrow[l] & K_0(C^*(X)) \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Da X als endlicher Kegel kontrahierbar ist, gilt $K_p(D^*(X)/C^*(X)) = 0$. Außerdem ist $C^*(X)$ kompakt, woraus

$$K_p(C^*(X)) = \mathbb{Z}$$

folgt.
Mit diesen Eigenschaften ergibt sich nun

$$K_0(D^*(X)) = \mathbb{Z} \text{ und } K_1(D^*(X)) = 0.$$

Bemerkung 6.4.12 Obiges Beispiel gilt jedoch nur für endliche Kegel, da bei den unendlichen Kegeln die Kompaktheit verletzt ist. In diesem Fall muss man die Einpunktkompaktifizierung betrachten, um die relative K-Homologie zu berechnen.

7 Ausblick

Bei der K-Theorie, der K-Homologie und der groben Geometrie handelt es sich um drei verhältnismäßig junge Teilbereiche der Mathematik.

Es gibt viele zukunftsweisende Themenschwerpunkte, die weit über die in dieser Arbeit thematisierten Anwendungen hinausgehen.
Dazu gehören beispielsweise der Zusammenhang zwischen der K-Theorie und einzelnen charakteristischen Klassen von Vektorraumbündeln, wie den Chern- oder den Pontryagin-Klassen, die ebenso wie die K-Theorie-Klassen topologische Invariante von Vektorraumbündeln darstellen.
Darüber hinaus wurde von Gennadi Kasparov die K-Theorie auf die KK-Theorie verallgemeinert, die im Gegensatz zur ursprünglichen K-Theorie von zwei C^*-Algebren abhängt, die eine $\mathbb{Z}/2$-Graduierung tragen. Auch in der KK-Theorie finden sich einige Eigenschaften, wie beispielsweise die Bott-Periodizität oder die zyklischen kurzen exakten Sequenzen, wieder.

Es gibt aber auch einige offene Vermutungen. Dazu zählen beispielsweise die bereits erwähnte Novikov-Vermutung (6.3.4), die noch allgemeiner formuliert werden kann, als es an dieser Stelle der Fall war. Auch der Beweis der Baum-Connes-Vermutung wurde noch nicht veröffentlicht. Es gelang jedoch einigen Mathematikern, darunter Nigel Higson, Alain Connes und Paul Frank Baum, einzelne Spezialfälle der Vermutung zu beweisen.

Die Verallgemeinerung des Atiyah-Singer-Indexsatzes ist ebenfalls ein aktueller Forschungsschwerpunkt. Auch hier haben die K-Theorie (beziehungsweise die KK-Theorie) und die K-Homologie einen großen Einfluss.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen, und mich bei denjenigen bedanken, ohne die das Verfassen meiner Masterarbeit in diesem Rahmen nicht möglich gewesen wäre.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Schrohe für die angenehme fachliche Betreuung sowohl durch Vorlesungen und Seminare als auch durch die Gespräche während des Verfassens meiner Masterarbeit.

Ich danke Frau Prof. Dr. Rowlett für die Begleitung im Rahmen meines Studiums in Form von vertiefenden Vorlesungen und Vorträgen.

Außerdem danke ich dem gesamten uniKIK-Team für die Möglichkeit, mich nicht komplett in der Mathematik zu verlieren. Ich möchte mich bei Dr. Florian Leydecker, Swantje Ludwig, Andrea Schmidt, Martin Scholz und Kimberly Schrader für die vielen Erfahrungen, die ich mit ihrer Hilfe in den vergangenen zwei Jahren sammeln durfte, bedanken. Mein besonderer Dank gilt Ina Fedrich für das mir entgegengebrachte Vertrauen!

Nicht unerwähnt bleiben sollen an dieser Stelle natürlich meine Kommilitonen und Freunde, die immer für eine Ablenkung bereit waren, wenn ich sie brauchte und zeitlich unterbringen konnte, und die sich mit der Korrektur meiner Masterarbeit auseinandergesetzt haben, wodurch ich ihnen die Leserlichkeit dieser Arbeit durch Eliminierung der unverständlichen und zu verschachtelten Sätze zu verdanken habe. Vielen Dank auch für die unvergesslichen acht Semester Mathestudium, die ohne euch bei Weitem nicht so lustig, abwechslungsreich und angenehm gewesen wären.

Zudem danke ich meiner Familie für den Rückhalt in jeder Phase meines Studiums.

Symbolverzeichnis

Räume

Symbol	Bedeutung
E, F	komplexe Vektorraumbündel
H	komplexer Hilbertraum
M	Mannigfaltigkeit
X	topologischer Raum
$C(X)$	Menge aller komplexwertigen stetigen Funktionen auf X
$C_0(X)$	Menge aller stetigen Funktionen, die im Unendlichen verschwinden
$C_c^\infty(M,S)$	Raum der glatten Schnitte auf S mit kompaktem Träger
$L^2(M,S)$	Abschluss von C_c^∞ bzgl. des inneren Produktes
$M_n(\mathbb{C})$	Raum der $n \times n$-Matrizen mit komplexen Einträgen
$\mathcal{P}$	Raum aller Projektionen von X in $M_n(\mathbb{C})$
$\Omega^p(M)$	Raum der glatten, komplexwertigen p-Formen auf M
$\Lambda^*_{\mathbb{C}}(M)$	komplexes äußeres Algebra-Bündel

Algebren

Symbol	Bedeutung
A	C^*-Algebra
$\tilde{A}$	Unitalisierung von A
$C^*(X)$	Abschluss der Algebra aller lokal kompakten, kontrollierbaren Operatoren auf H_X
$C(X,A)$	C^*-Algebra der stetigen A-wertigen Funktionen auf X
$\mathfrak{D}_\rho(A), \mathfrak{D}(A)$	zu A duale Algebra
$\mathfrak{D}_\rho(A//J)$	relative duale Algebra
J	Ideal
$\mathfrak{B}(H)$	Algebra aller beschränkten Operatoren auf H
$\mathfrak{k}(H)$	Banachalgebra aller kompakten Operatoren auf H
$\mathfrak{Q}(H)$	Calkin-Algebra

K-Theorie und K-Homologie

Symbol	Bedeutung
$K_0(X)$	nullte K-Theorie-Gruppe
$K_0(A)$	nullte K-Theorie-Gruppe einer C^*-Algebra
$K_0(A, A/J)$	relative K-Theorie-Gruppe
$K_p(A)$	p-te K-Theorie-Gruppe einer C^*-Algebra
$K_p(X)$	p-te K-Homologie-Gruppe eines Raumes
$\tilde{K}^0(A)$	erste analytische K-Theorie-Gruppe von A
$\tilde{K}^1(A)$	nullte analytische K-Theorie-Gruppe von A
$K^p(A)$	unreduzierte K-Theorie-Gruppen
$K^p(A, A/J)$	höhere relative K-Homologie-Gruppe
$\times$	K-Theorie-Produkt

Abbildungen und Operatoren

Symbol	Bedeutung
$\oplus$	direkte Summe
$\otimes$	Tensorprodukt
D	Differentialoperator
D^*	formales Adjungiertes von D
i	Inklusionsabbildung
p, q	Projektionsabbildung
p^*	Involutionsabbildung
π	Quotientenabbildung
φ	$*$-Homomorphismus
ρ	Darstellung eines Hilbertraums
T, V	Operator

Sonstiges

Symbol	Bedeutung
$[\cdot]$	Äquivalenzklasse
$[\cdot, \cdot]$	Kommutator
$A[D]$	grober Index von D
diam	Durchmesser
∂X	Rand von X

e	Einselement
ξ	Kotangentialvektor
Im	Bild einer Abbildung
$\ker$	Kern einer Abbildung
prop	Ausbreitungsgeschwindigkeit
$S(A)$	Suspension
σ_D	Symbol
$\mathrm{supp}(V)$	Träger, Nichtnullstellenmenge
T^n	Torus
$\mathcal{C}Y$	abgeschlossener Kegel auf Y
$\mathcal{O}Y$	offener Kegel auf Y

Index

Literaturverzeichnis

[Ati67] M. F. Atiyah. *K-theory*. Lecture notes by D. W. Anderson. W. A. Benjamin, Inc., New York-Amsterdam, 1967.

[Ati70] M. F. Atiyah. Global theory of elliptic operators. In *Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo, 1969)*, pages 21–30. Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1970.

[BDF77] L. G. Brown, R. G. Douglas, and P. A. Fillmore. Extensions of c*-algebras and k-homology. *Annals of Mathematics*, 105(2):pp. 265–324, 1977.

[BP] Arthur Bartels and Ulrich Pennig. Seminar zum Thema Grobe Geometrie [online]. http://www.math.uni-muenster.de/u/upenn_01/WS2012-2013/CoarseGeometry.pdf. Universität Münster. Stand: 11. August 2015.

[Bro98] Jacek Brodzki. *An introduction to K-theory and cyclic cohomology*. Advanced Topics in Mathematics. PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1998.

[Con90] John B. Conway. *A course in functional analysis*, volume 96 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1990.

[Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[HR00] Nigel Higson and John Roe. *Analytic K-homology*. Oxford Mathematical Monographs. Oxford University Press, Oxford, 2000. Oxford Science Publications.

[Kas75] G. G. Kasparov. Topological invariants of elliptic operators. I. k-homology. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 39(4):796–838, 1975.

[Kas80] G. G. Kasparov. The operator k-functor and extensions of C^*-algebras. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 44(3):571–636, 719, 1980.

[RLL00a] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen. *An introduction to K-theory for C^*-algebras*, volume 49 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[RLL00b] M. Rørdam, F. Larsen, and N. Laustsen. *An introduction to K-theory for C^*-algebras*, volume 49 of *London Mathematical Society Student Texts*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[Roe96] John Roe. *Index theory, coarse geometry, and topology of manifolds*, volume 90 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1996.

[Sch] Thomas Schick. Lectures on coarse index theory [online]. http://www.uni-math.gwdg.de/schick/publ/Cortona_12_coarse_index.pdf. Georg-August-Universität Göttingen. Stand: 16. Mai 2015.

[WO93] N. E. Wegge-Olsen. *K-theory and C^*-algebras*. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993. A friendly approach.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen Hilfsmittel als angegeben verwendet habe. Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Werken entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.
Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keinem anderen Prüfer als Prüfungsleistung eingereicht und ist auch noch nicht veröffentlicht.

Ort:
Datum: Unterschrift: