



Leibniz Universität Hannover
Fakultät für Mathematik und Physik
Institut für Differentialgeometrie

Übersichtsarbeit über Pontryagin-Klassen

Bachelorarbeit

Autorin: Jil Ann-Christin Klünder
Matrikelnummer: 2845840
Studiengang: B. Sc. Mathematik
E-Mail: j.kluender@stud.uni-hannover.de
Prüfer: Prof. Dr. K. Smoczyk

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	1
Zusammenfassung	3
1. Einleitung	5
1.1. (Komplexe) Vektorraumbündel und die Whitney-Summe	6
1.2. Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Vektorraumbündeln	9
2. Charakteristische Klassen	13
2.1. Stiefel-Whitney-Klassen	13
2.2. Euler-Klasse	16
2.3. Chern-Klassen	17
2.4. Pontryagin-Klassen	22
3. Zusammenhänge mit anderen charakteristischen Klassen	27
3.1. Zusammenhang zwischen Pontryagin- und Chern-Klassen	27
3.2. Zusammenhang zwischen Pontryagin- und Euler-Klassen	29
3.3. Zusammenhang zwischen Pontryagin- und Stiefel-Whitney-Klassen . .	30
4. Pontryagin-Klassen von Grassmann-Mannigfaltigkeiten	31
5. Ausblick: Pontryagin-Zahlen	35
A. Anhang: (Ko-)Homologie-Gruppen	37
A.1. Singuläre Homologie-Gruppen	37
A.2. Singuläre Kohomologie-Gruppen	38
B. Anhang: Komplexifizierungen	41
B.1. Komplexifizierung von Vektorräumen	41
B.2. Komplexifizierung von Vektorraumbündeln	43
C. Anhang: Strukturen auf Grassmann-Mannigfaltigkeiten	45
C.1. Grassmann-Mannigfaltigkeiten	45
C.2. Kanonische Vektorraumbündel auf G_n	46

Inhaltsverzeichnis

Symbolverzeichnis	51
Danksagung	53
Literaturverzeichnis	55
Selbstständigkeitserklärung	57

Vorwort

Bereits in den frühen 40er Jahren haben sich Mathematiker erstmals mit dem Thema der charakteristischen Klassen beschäftigt.

Die Anfänge auf diesem Themengebiet können den Mathematikern Hassler Whitney (1907 - 1989) und Eduard Stiefel (1909 - 1978), welche nahezu zeitgleich aber unabhängig voneinander an dieser Thematik gearbeitet haben, zugeschrieben werden. Hierbei schrieb Stiefel seine Arbeit unter Einflussnahme des algebraischen Topologen Heinz Hopf (1894 - 1971). Das primäre Ziel von Stiefels Arbeit war die Definition einer topologischen Invarianten, welche durch das Tangentialbündel einer glatten Mannigfaltigkeit bestimmt wird. Whitney spezifizierte die Aussagen von Stiefel und betrachtete ein Vektorraumbündel auf einer beliebigen Sphäre.

Lev Pontryagin (1908 - 1988), ein russischer Mathematiker, welcher zu Sowjetzeiten als einer der einflussreichsten Mathematiker galt, begann 1942 mit seiner Arbeit auf Grassmann-Mannigfaltigkeiten. Ähnlich wie Stiefel und Whitney vor ihm betrachtete er die Homologieklassen. Das Resultat seiner Arbeit war die Definition der Pontryagin-Klassen.

Wenige Jahre später, im Jahr 1946, wurden die Chern-Klassen vom US-amerikanischen Mathematiker Shing-Shen Chern (1911 - 2004) definiert. Im Gegensatz zu den Differentialgeometern und Topologen jener Zeit, welche sich mit der Theorie der charakteristischen Klassen beschäftigt hatten, betrachtete Chern komplexe Vektorraumbündel. Dabei fand er heraus, dass die Kohomologie auf komplexen Grassmann-Mannigfaltigkeiten leichter zu verstehen ist als jene von reellen Grassmann-Mannigfaltigkeiten.

Anwendung finden die charakteristischen Klassen vor allem in der Topologie, der Differentialgeometrie und der Algebraischen Geometrie, da sie Aussagen darüber erlauben, ob zwei Vektorraumbündel zueinander homöomorph sind. Kann man zeigen, dass zwei Vektorraumbündel homöomorph sind, so erlaubt dies Rückschlüsse auf bestimmte Eigenschaften, die bei beiden Bündeln auftreten, weshalb die Fragestellung

Vorwort

nach der Homöomorphie sehr interessant ist.

Verfasst wurde diese Arbeit im Rahmen eines Seminars über Differentialgeometrie. Sie soll es sowohl Studierenden als auch Lehrenden ermöglichen, einen Überblick über charakteristische Klassen zu erlangen.

Dabei setze ich grundlegende Kenntnisse im Bereich der Differentialgeometrie wie beispielsweise die Definition einer reellen oder komplexen Mannigfaltigkeit, eines reellen Vektorraumbündels sowie die Kenntnis einiger Strukturen auf selbigen, voraus. Zu Letzteren gehört beispielsweise die Definition eines Zusammenhangs sowie ein grundlegendes Verständnis einer Krümmung auf der Mannigfaltigkeit, wengleich der Krümmungstensor im Rahmen dieser Arbeit definiert wird. Eine gute Grundlage auf dem Gebiet bieten die Bücher [Lee11] und [Lee13].

Zusammenfassung

Alle charakteristischen Klassen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, weisen bestimmte Eigenschaften und Zusammenhänge untereinander auf. Dazu gehört beispielsweise die Bedingung der Natürlichkeit, welche einer Verträglichkeit mit Pullback-Abbildungen entspricht. Darüber hinaus genügen sämtliche charakteristischen Klassen einer Whitney-Produkt-Formel.

Wenngleich die bereits zuvor erwähnten Zusammenhänge der charakteristischen Klassen untereinander nicht trivial sind, lässt sich dennoch die Pontryagin-Klasse durch die Chern-Klassen, die Euler-Klasse und die Stiefel-Whitney-Klasse ausdrücken. Diese Zusammenhänge erlauben beispielsweise die Berechnung der totalen Pontryagin-Klasse des $\mathbb{C}P^n$, welche sich über die Chern-Klasse deutlich leichter berechnen lässt, als es ohne Berücksichtigung dieses Zusammenhangs möglich wäre.

Die Pontryagin-Klassen von Grassmann-Mannigfaltigkeiten, vor allem jene der unendlichen Grassmann-Mannigfaltigkeiten, spielen noch eine übergeordnete Rolle, da sich sowohl $H^*(G_n; \mathbb{Z})$ als auch $H^*(\tilde{G}_n; \mathbb{Z})$, also der Ring über die Summen von Elementen in den i -ten Kohomologieklassen der Grassmann-Mannigfaltigkeit mit ganzzahligen Koeffizienten, durch Pontryagin-Klassen beschreiben lässt.

Diese Aussage lässt sich dahingehend verallgemeinern, dass charakteristische Klassen bijektiv mit den Kohomologieklassen der Grassmann-Mannigfaltigkeit mit Koeffizienten in unterschiedliche Körpern übereinstimmen.

1. Einleitung

Charakteristische Klassen sind als Kohomologieklassen topologische Invarianten eines reellen beziehungsweise komplexen Vektorraumbündels. Mit ihnen ist es möglich, die Verdrehtheit des Bündels zu messen sowie eine Aussage darüber zu treffen, ob zwei topologische Räume zueinander homöomorph sind. Sie sind ein Maß für die Nicht-Trivialität des zugrunde liegenden Vektorraumbündels, da die charakteristischen Klassen eines trivialen Vektorraumbündels verschwinden, das heißt, sie entsprechen dem Nullelement in der entsprechenden Kohomologieklass¹⁾.

Man unterscheidet zwischen vier wichtigen charakteristischen Klassen: der Stiefel-Whitney-Klasse, der Euler-Klasse, der Chern-Klasse und der Pontryagin-Klasse²⁾. Diese unterscheiden sich in erster Linie durch die Art der Vektorraumbündel, für die sie definiert sind. So ist beispielsweise die Chern-Klasse für komplexe Vektorraumbündel definiert, während die anderen drei der vier zuvor erwähnten Typen auf reellen Vektorraumbündeln definiert sind. Darüber hinaus wird für die Euler-Klasse noch eine Orientierung des Vektorraumbündels vorausgesetzt.

In der vorliegenden Arbeit werden ebendiese charakteristischen Klassen von glatten Mannigfaltigkeiten eingeführt, wobei das Hauptaugenmerk auf den Pontryagin-Klassen liegt. Darüber hinaus werden im Rahmen dieser Arbeit die grundlegenden Zusammenhänge zwischen den Pontryagin-Klassen und anderen charakteristischen Klassen aufgezeigt. In Kapitel 4 werden die Pontryagin-Klassen von Grassmann-Mannigfaltigkeiten betrachtet.

Im Verlauf der gesamten Arbeit wird folgende Notation³⁾ verwendet: Sofern nicht anders angegeben, sei T stets ein topologischer Raum, M eine topologische oder glatte Mannigfaltigkeit der reellen Dimension $m \in \mathbb{N}$, V ein reeller Vektorraum und $\xi = (E, \pi, M)$ ein reelles Vektorraumbündel vom Rang $n \in \mathbb{N}$. Die Komple-

¹⁾An dieser Stelle gilt jedoch nur die Implikation und keine Äquivalenz.

²⁾Es gibt noch weitere charakteristische Klassen, auf die im Rahmen dieser Arbeit jedoch nicht eingegangen werden kann.

³⁾Das Symbolverzeichnis findet sich auf Seite 51.

1. Einleitung

xifizierungen⁴⁾ von V und ξ bezeichnen wir mit $V_{\mathbb{C}}$ beziehungsweise $\xi_{\mathbb{C}}$.

Den reell projektiven Raum bezeichnen wir mit $\mathbb{R}P^n$ und den komplex projektiven Raum mit $\mathbb{C}P^n$. Darüber hinaus sei $T_p M$ der Tangentialraum von M im Punkt $p \in M$ und G_n die (unendliche) Grassmann-Mannigfaltigkeit⁵⁾.

Die Stiefel-Whitney-Klassen von M bezeichnen wir stets mit w , die Euler-Klasse mit χ , die Chern-Klasse mit γ und die Pontryagin-Klasse mit p .

Weiter bezeichne $H^i(M; K)$ die i -te singuläre Kohomologie-Gruppe von M mit Koeffizienten aus K ⁶⁾.

Die darüber hinaus verwendeten Bezeichnungen werden bei ihrer erstmaligen Verwendung aufgeführt.

1.1. (Komplexe) Vektorraumbündel und die Whitney-Summe

Da die Chern-Klassen für komplexe Vektorraumbündel definiert sind, sollen selbige an dieser Stelle eingeführt werden. Dafür werden noch einige weitere Begriffe wie der einer Bündel-Abbildung benötigt, welche auch im weiteren Verlauf der Arbeit Verwendung finden.

Im Folgenden sei T ein topologischer Raum. Wenngleich wir nur Vektorraumbündel über Mannigfaltigkeiten betrachten werden, definieren wir sie an dieser Stelle zunächst allgemeiner auf topologischen Räumen:

Definition 1.1.1 (Komplexes Vektorraumbündel) [MS74, S. 150] Es sei $\xi = (E, \pi, T)$ ein 3-Tupel bestehend aus zwei topologischen Räumen E (dem Totalraum) und T (dem Basisraum) sowie einer Projektionsabbildung $\pi: E \rightarrow T$. Dann heißt ξ komplexes Vektorraumbündel vom komplexen Rang n , wenn die Faser $E_p := \pi^{-1}(p)$ für jedes $p \in T$ die Struktur eines komplexen Vektorraums der komplexen Dimension n . Außerdem gelte die Bedingung der lokalen Trivialität: Jedes $p \in T$ besitze eine offene Umgebung U , sodass die Urbildmenge $\pi^{-1}(U)$ homöomorph zu $U \times \mathbb{C}^n$ ist. Der Homöomorphismus bilde dabei jede Faser $\pi^{-1}(p)$ komplex linear auf $\{p\} \times \mathbb{C}^n$ ab.

⁴⁾Die Komplexifizierungen führen wir in Anhang B ein.

⁵⁾Die Grassmann-Mannigfaltigkeiten werden in Anhang C.1 eingeführt.

⁶⁾Die Definition der i -ten singulären Kohomologie-Gruppe findet sich in A.2.4.

1.1. (Komplexe) Vektorraumbündel und die Whitney-Summe

Mit anderen Worten: Ein komplexes Vektorraumbündel ist analog zu einem reellen Vektorraumbündel definiert, wobei die Struktur des Vektorraums, der durch die Fasern definiert wird, sowie die Bedingung der lokalen Trivialität an den \mathbb{C}^n angepasst wurden.

Man erhält aus jedem reellen Vektorraumbündel $\xi = (E, \pi, T)$ ein komplexes Vektorraumbündel, indem man es komplexifiziert. Diese Komplexifizierung⁷⁾ bezeichnen wir stets mit $\xi_{\mathbb{C}}$.

Eine bestimmte Art von Vektorraumbündeln, welche im Rahmen dieser Arbeit betrachtet werden, sind triviale Bündel, Pullback- und Geradenbündel, welche wie folgt definiert sind:

Definition 1.1.2 (Triviales Bündel) [MS74, S. 13] Ein Vektorraumbündel $\xi = (E, \pi, T)$ heißt triviales Bündel, wenn $E = T \times F$, wobei F ein n -dimensionaler Vektorraum sei, und $\pi: E \rightarrow T$ die Projektion auf den ersten Faktor ist, d. h. für $(x, y) \in T \times F$ ist $\pi(x, y) = x$. Dann ist E nicht nur lokal sondern global ein Produktraum und F ist eine Faser von ξ .

Definition 1.1.3 (Pullbackbündel) [MS74, S. 25] Sei $\xi = (E, \pi, T)$ ein Vektorraumbündel und T_1 ein beliebiger topologischer Raum. Dann induziert jede Abbildung $f: T_1 \rightarrow T$ das Pullbackbündel $f^*\xi = (E_1, \pi_1, T_1)$ wie folgt:

Der Totalraum E_1 sei die Teilmenge

$$E_1 := \{(b, e) : b \in B_1, e \in E \text{ und } f(b) = \pi(e)\} \subset B_1 \times E$$

Die Projektionsabbildung $\pi_1: E_1 \rightarrow B_1$ sei die Projektion auf die erste Komponente, das heißt $\pi_1(b, e) = b$ und die Vektorraumstruktur auf einer Faser sei durch

$$t_1(b, e_1) + t_2(b, e_2) = (b, t_1 e_1 + t_2 e_2)$$

gegeben.

Der Beweis, dass $f^*\xi$ lokal trivial ist, kann in [MS74, S. 26] nachgelesen werden.

Definition 1.1.4 (Geradenbündel) Ein komplexes Vektorraumbündel vom Rang 1 bezeichnen wir als Geradenbündel.

Um aus zwei Vektorraumbündeln ein weiteres Bündel zu gewinnen, welches mit dem Produkt beider Vektorraumbündel vergleichbar ist, benötigen wir die Whitney-Summe. Dazu betrachten wir zwei Vektorraumbündel

$$\xi_1 = (E_1, \pi_1, T) \text{ und } \xi_2 = (E_2, \pi_2, T)$$

⁷⁾Für die Definition der Komplexifizierung sei auf Anhang B.2.1 verwiesen.

1. Einleitung

über einem topologischen Raum T . Wenngleich wir auch die Whitney-Summe nur für Vektorraumbündel über differenzierbaren Mannigfaltigkeiten betrachten werden, definieren wir sie an dieser Stelle allgemeiner für Vektorraumbündel über topologischen Räumen.

Definition 1.1.5 (Whitney-Summe) [MS74, S. 27] Seien ξ_1 und ξ_2 wie oben angegeben. Das Faserprodukt

$$\xi_1 \oplus \xi_2 := (E_1 \oplus E_2, \omega, T)$$

wird mit $E_1 \oplus E_2 := \{(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 : \pi_1(x_1) = \pi_2(x_2)\}$ und $\omega(x_1, x_2) := \pi_1(x_1) = \pi_2(x_2)$ zu einem Vektorraumbündel über T . Für einen Punkt $p \in E_1 \oplus E_2$ sei die Faser E_p gegeben durch $E_p := \omega^{-1}(p) = \pi_1^{-1}(p) \times \pi_2^{-1}(p)$.

Dass es sich bei der Whitney-Summe tatsächlich um ein Vektorraumbündel handelt, zeigt folgendes Lemma:

Lemma 1.1.6 Die Whitney-Summe definiert ein Vektorraumbündel über M .

Beweis: Wir müssen die Axiome verifizieren.

Sei $p \in T$ beliebig. Dann trägt die Faser E_p die Struktur des Vektorraums der direkten Summe der beiden zugrunde liegenden Vektorräume.

Seien nun ϕ_1 und ϕ_2 zwei lokale Trivialisierungen auf U , wobei $U \subset E_1 \oplus E_2$. Definiere nun für folgende Abbildungen

$$\phi_1: U \times \mathbb{R}^{n_1} \rightarrow \pi_1^{-1}(U)$$

$$\phi_2: U \times \mathbb{R}^{n_2} \rightarrow \pi_2^{-1}(U)$$

die Abbildung $\phi := \phi_1 \oplus \phi_2$, die durch

$$\begin{aligned} \phi: U \times \mathbb{R}^{n_1+n_2} &\rightarrow \omega^{-1}(U), \\ (b, x, y) &\mapsto (\phi_1(b, x), \phi_2(b, y)) \end{aligned}$$

definiert wird. Dann ist ϕ eine lokale Trivialisierung von $\xi_1 \oplus \xi_2$. □

Für den weiteren Verlauf der vorliegenden Arbeit benötigen wir noch den Begriff der Bündel-Abbildung zwischen zwei Vektorraumbündeln $\xi_1 = (E_1, \pi_1, T_1)$ und $\xi_2 = (E_2, \pi_2, T_2)$.

Definition 1.1.7 (Bündel-Abbildung) Eine Bündel-Abbildung zwischen ξ_1 und ξ_2 ist eine stetige Funktion $g: E_1 \rightarrow E_2$, die für jedes $p \in E_1$ die Faser $(E_1)_p$ von ξ_1 isomorph auf eine Faser $(E_2)_{p'}$ von ξ_2 abbildet, wobei $p' \in E_2$ gilt.

1.2. Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Vektorraumbündeln

Für die Berechnung der charakteristischen Klassen von konjugierten Vektorraumbündeln benötigen wir folgende Definition:

Definition 1.1.8 (Konjugiertes Vektorraumbündel) [MS74, S. 166] Bei dem zu einem komplexen Vektorraumbündel $\xi = (E, \pi, M)$ gehörigen konjugierten Vektorraumbündel $\bar{\xi}$ handelt es sich um ein komplexes Vektorraumbündel über dem gleichen Basisraum M mit umgedrehter komplexer Struktur.

1.2. Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Vektorraumbündeln

Über die Komplexifizierung erhalten wir aus einem reellen Vektorraumbündel ein komplexes. Unser Ziel ist es nun, aus einem komplexen Vektorraumbündel ein reelles zurückzugewinnen. Wie dies unter Zuhilfenahme der Orientierung möglich ist, wird in [MS74, S. 176] wie folgt beschrieben:

Das komplexifizierte Vektorraumbündel $\xi_{\mathbb{C}}$ ist mit einer komplexen Struktur J ausgestattet. Diese vernachlässigen wir und versehen $(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ mit der bevorzugten und durch die komplexe Struktur J induzierten Orientierung. Dabei bezeichnet $(\xi_{\mathbb{C}})_{\mathbb{R}}$ das resultierende Vektorraumbündel vom Rang $2n$. Lassen wir nun die Orientierung wegfallen, so erhalten wir ein neues reelles Vektorraumbündel vom Rang $2n$, das mit der Whitney-Summe $\xi \oplus \bar{\xi}$ identifiziert werden kann. Das auf diesem Wege gewonnene reelle Vektorraumbündel bezeichnen wir als untergeordnetes reelles Vektorraumbündel.

Unabhängig von der Startposition im Kreisdiagramm verdoppelt sich bei jedem Umlauf die Dimension des Bündels, mit welchem wir gestartet sind. Dabei wird der Typ des Bündels (reell oder komplex) nicht verändert.

Außerdem stellen wir folgenden Zusammenhang fest:

Lemma 1.2.1 [MS74, S. 176: Lemma 15.4] Sei $\xi = (E, \pi, M)$ ein komplexes Vektorbündel und $\xi_{\mathbb{C}} := \xi_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ die Komplexifizierung seines untergeordneten reellen Vektorbündels. Dann ist $\xi_{\mathbb{C}}$ kanonisch isomorph zur Whitney-Summe $\xi \oplus \bar{\xi}$, wobei $\bar{\xi}$ das zu ξ gehörige konjugierte Vektorraumbündel bezeichnet.

Beweis: Wie wir in Definition B.1 gesehen haben, können wir für jeden Vektorraum V die Komplexifizierung $V_{\mathbb{C}}$ auch mit der direkten Summe $V \oplus iV$ identifizieren. Versehen wir diese nun mit der komplexen Struktur $J(x, y) := (-y, x)$, so erhalten wir

1. Einleitung

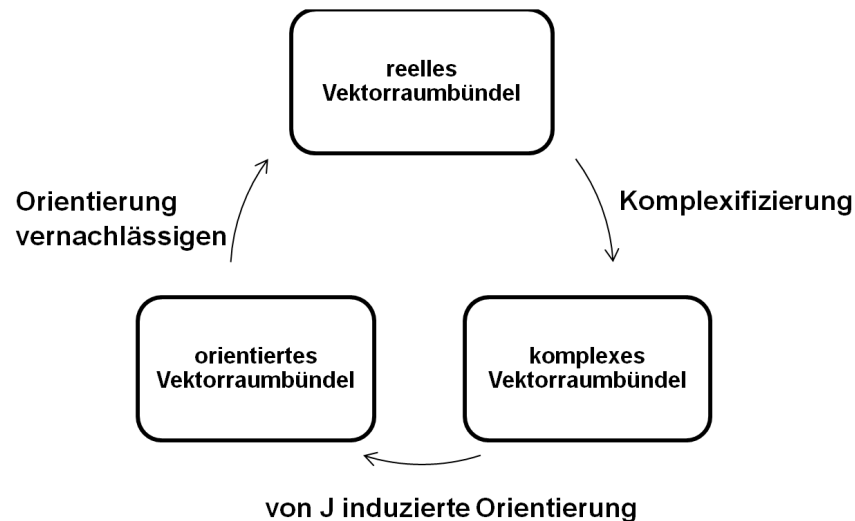


Abbildung 1.1.: Zusammenhänge zwischen reellen, komplexen und orientierten Vektorraumbündeln

einen komplexen Vektorraum. Außerdem sei E_p für $p \in M$ eine Faser des komplexen Vektorraumbündels. Wir betrachten nun die Abbildungen

$$g, h: E_p \rightarrow V \oplus V,$$

die durch

$$g: x \mapsto (x, -ix) \quad \text{und} \quad h: x \mapsto (x, ix).$$

definiert sind. Offensichtlich erfüllt g die Gleichung $g(ix) = J(g(x))$. Zudem ist g komplex linear; h ist konjugiert linear. Darüber hinaus beobachten wir, dass jeder Punkt $(x, y) \in V \oplus V \cong (E_p)_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ als eindeutige Summe

$$(x, y) = g\left(\frac{x + iy}{2}\right) + h\left(\frac{x - iy}{2}\right)$$

geschrieben werden kann. Somit ist $(E_p)_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ als komplexer Vektorraum kanonisch isomorph zu $E_p \oplus \bar{E}_p$. Da dies für jede Faser E_p von ξ erfüllt ist, folgt die Aussage des Satzes, denn wenn wir all diese Isomorphismen kombinieren, so erhalten wir $\xi_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} \cong \xi \oplus \bar{\xi}$. \square

Sei $\xi = (E, \pi, M)$ wieder ein komplexes Vektorraumbündel vom Rang n . Dann gilt für das untergeordnete reelle Vektorraumbündel $\xi_{\mathbb{R}}$ vom Rang $2n$:

Lemma 1.2.2 [MS74, S. 154: Lemma 14.1] $\xi_{\mathbb{R}}$ trägt die kanonische Orientierung.

1.2. Zusammenhang zwischen reellen und komplexen Vektorraumbündeln

Beweis: Sei V ein komplexer Vektorraum der Dimension $\dim V = n < \infty$ und e_1, \dots, e_n eine komplexe Basis von V , so ist $e_1, ie_1, \dots, e_n, ie_n$ eine reelle Basis von $V_{\mathbb{R}}$. Diese geordnete Basis bestimmt die Orientierung von $V_{\mathbb{R}}$.

Zu zeigen ist nun noch, dass die Orientierung nicht von der Wahl der komplexen Basis abhängt. Dies folgt jedoch aus dem Zusammenhang der linearen Gruppe $GL(n, \mathbb{C})$ aller regulären $n \times n$ -Matrizen mit komplexen Koeffizienten. Somit ist der Basiswechsel stetig und die induzierte Orientierung bleibt erhalten. Wenn wir dies nun auf jede Faser E_p von ξ anwenden, erhalten wir die gewünschte Orientierung von $\xi_{\mathbb{R}}$. \square

2. Charakteristische Klassen

In diesem Kapitel sollen die Stiefel-Whitney-Klassen, die Euler-Klassen und die Chern-Klassen eingeführt werden. Für dieses Kapitel wurden in erster Linie [MS74], [Hat] und [Bä] verwendet.

Eine charakteristische Klasse kann als eine Funktion definiert werden, die jedem Vektorbündel $\xi = (E, \pi, M)$ vom Rang n eine Klasse $\alpha(\xi) \in H^k(M; G)$ zuordnet, wobei n und k fest gewählt seien. Dabei setzen wir voraus, dass die Klassen α die Bedingung der Natürlichkeit erfüllen, das heißt, dass $\alpha(f^*(\xi)) = f^*(\alpha(\xi))$, wobei f^* ein Pullback sei.

Betrachten wir das Universalbündel¹⁾ $\xi = (E_n, \pi, G_n)$, so ergibt sich die Klasse

$$\alpha = \alpha(\xi) \in H^k(G_n; G),$$

wobei G_n die Grassmann-Mannigfaltigkeit bezeichne. Andererseits definiert jedes $\alpha \in H^k(G_n; G)$ eine charakteristische Klasse unter der Voraussetzung, dass $\alpha(f^*(\xi)) = f^*(\alpha(\xi))$. Da f bis auf Homotopie eindeutig ist, ist $\alpha(\xi)$ wohldefiniert und nach Voraussetzung ist auch die Bedingung der Natürlichkeit gegeben.

Demnach stimmen die charakteristischen Klassen bijektiv mit den Homologieklassen der Grassmann-Mannigfaltigkeit G_n überein. Sie werden deshalb auch oftmals verwendet, um diese zu repräsentieren.

2.1. Stiefel-Whitney-Klassen

Wir werden die Stiefel-Whitney-Klassen axiomatisch nach [MS74] definieren. Dazu sei $\xi = (E, \pi, M)$ ein reelles Vektorraumbündel vom Rang n und $H^i(M; \mathbb{Z}_2)$ bezeichne die i -te Kohomologiegruppe von M mit Koeffizienten aus \mathbb{Z}_2 .

Definition 2.1.1 (Stiefel-Whitney-Klasse) [MS74, S. 37 f.] Die Stiefel-Whitney-Klassen von ξ sind definiert durch die unendliche Folge von Kohomologie-Klassen

$$w_i(\xi) \in H^i(M; \mathbb{Z}_2), \quad i = 0, 1, 2, \dots,$$

die folgende Axiome erfüllt:

¹⁾Das Universalbündel wird in Anhang C.2 definiert.

2. Charakteristische Klassen

(i) Die nullte Stiefel-Whitney-Klasse $w_0(\xi)$ entspricht dem Einselement

$$1 \in H^0(M; \mathbb{Z}_2).$$

Ferner erfülle die restliche Folge

$$w_i(\xi) = 0 \text{ für } i > n = \text{rang}(\xi).$$

(ii) Für ein durch eine Abbildung f zurückgezogenes Bündel $f^*(\xi)$ gelte

$$w_i(f^*(\xi)) = f^*w_i(\xi).$$

(iii) Für zwei Vektorraumbündel ξ_1 und ξ_2 über dem Basisraum M gelte folgende Produktformel:

$$w_k(\xi_1 \oplus \xi_2) = \sum_{i=0}^k w_i(\xi_1) \cdot w_{k-i}(\xi_2).$$

(iv) Für das Geraden-Bündel ρ des Einheitskreises sei die Stiefel-Whitney-Klasse $w_1(\rho) \neq 0$.

Bemerkung 2.1.2 Die durch Axiom (iii) implizierte Formel wird Whitney-Produkt genannt.

Dass eine Folge von Kohomologieklassen existiert, welche den Axiomen der Stiefel-Whitney-Klasse genügt, ist zunächst nicht trivial. Die Existenz wurde unter anderem in [MS74, S. 89 ff.] gezeigt.

Ohne Beweis geben wir für drei Vektorraumbündel $\xi = (E, \pi, M)$, $\xi_1 = (E_1, \pi_1, M_1)$ und $\xi_2 = (E_2, \pi_2, M_2)$ an:

Proposition 2.1.3 [MS74, S. 38] *Ist ξ_1 isomorph zu ξ_2 , so stimmen alle i -ten Stiefel-Whitney-Klassen überein.*

Proposition 2.1.4 [MS74, S. 38] *Ist ξ ein triviales Vektorbündel, so ist $w_i(\xi) = 0$ für alle $i > 0$.*

Proposition 2.1.5 [MS74, S. 39] *Ist ξ ein triviales Vektorraumbündel, so ist $w_i(\xi \oplus \xi_1) = w_i(\xi_1)$.*

Wir betrachten nun $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ als die Menge bestehend aus allen unendlichen Summen der Form

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \dots \text{ mit } a_i \in H^i(M; \mathbb{Z}_2).$$

Wir betrachten auf $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ die nachfolgende Multiplikation: Für a und $b \in H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ sei

$$\begin{aligned} a \cdot b &= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots) := (a_0 b_0) \\ &\quad + (a_1 b_0 + a_0 b_1) \\ &\quad + (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

Die Kommutativität der so definierten Multiplikation wurde in [MS74, S. 39] gezeigt. Da die Multiplikation ebenso assoziativ ist und wir nur die Kongruenz modulo 2 betrachten, folgt, dass $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ ein Ring ist.

Auf diesem Ring können wir nun die totale Stiefel-Whitney-Klasse wie folgt definieren:

Definition 2.1.6 (Totale Stiefel-Whitney-Klasse) [MS74, S. 39] Es seien $w_i(\xi)$ die Stiefel-Whitney-Klassen von ξ , wobei ξ wie in Definition 2.1.1 gegeben sei. Dann ist die totale Stiefel-Whitney-Klasse $w(\xi)$ definiert als

$$\begin{aligned} w(\xi) &= w_0(\xi) + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \dots \\ &= 1 + w_1(\xi) + w_2(\xi) + \dots \end{aligned}$$

und es gilt $w(\xi) \in H^*(M, \mathbb{Z}_2)$.

Bemerkung 2.1.7 Da nach Axiom (i) die Summe $\sum_{i \geq 0} w_i(\xi)$ endlich ist, ist die totale Stiefel-Whitney-Klasse wohldefiniert.

Bemerkung 2.1.8 Mit der auf $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ definierten Multiplikation vereinfacht sich Axiom (iii) nun zu

$$w(\xi_1 \oplus \xi_2) = w(\xi_1) \cdot w(\xi_2).$$

Beispiel 2.1.9 [Hat, S. 81: Example 3.4] Die Eigenschaft (ii), also die Natürlichkeit der Stiefel-Whitney-Klasse, impliziert, dass jedes Produktbündel von der Form $\xi = (E, \pi, M)$ mit $E = M \times \mathbb{R}^n$ die Gleichung

$$w_i(\xi) = 0 \forall i > 0$$

erfüllt. Dies begründet sich damit, dass das Produkt des Pullbacks eines Bündels jenes über einen Punkt ist. Da Punkte in positiven Dimensionen stets die triviale Kohomologie besitzen, ist für das durch eine Abbildung f zurückgezogene Bündel und damit auch für das Produktbündel $w_i(f^* \xi) = f^* w_i(\xi) = 0$ erfüllt.

2.2. Euler-Klasse

Die Euler-Klasse werden wir analog zu [Bä] einführen.

Wir betrachten einen reellen orientierten Vektorraum V mit gerader Dimension $n = 2m$. $SO(V)$ bezeichne die Lie-Algebra der schiefsymmetrischen Endomorphismen von V . Für $A \in SO(V)$ definieren wir die Pfaffsche von A , $\text{Pf}(A) \in \mathbb{R}$, durch

$$A^m = \underbrace{A \wedge A \wedge \dots \wedge A}_{m\text{-mal}} = \text{Pf}(A) \cdot \text{vol} \in \bigwedge^{2m} V$$

Hierbei benutzen wir den Zusammenhang $SO(V) \cong \bigwedge^2 V$. Außerdem induziert

$$A \in SO(V) \subseteq \text{End}(V)$$

einen Endomorphismus

$$A \wedge \dots \wedge A = \det A: \bigwedge^n V \rightarrow \bigwedge^n V$$

und es gilt $(\text{Pf}(A))^2 = \det A$.

Bevor wir die Euler-Klasse definieren können, benötigen wir die Definition der Krümmungsmatrix. Sei dazu wieder $\xi = (E, \pi, M)$ ein reelles Vektorraumbündel vom Rang n . Dann erhalten wir:

Definition 2.2.1 (Krümmungstensor) [Bä, S. 2] Wählt man einen Zusammenhang ∇ auf E , so ist der Krümmungstensor R gegeben durch

$$R^\nabla(X, Y)\beta = (\nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]})\beta.$$

Dabei seien X und Y glatte Vektorfelder und β ein Schnitt von E über U , wobei U eine offene Teilmenge von E sei.

Nach der Definition von Vektorraumbündeln können wir ξ auf kleinen offenen Mengen $U \subset M$ trivialisieren, das heißt, es existieren glatte Schnitte β_1, \dots, β_n von E über U , sodass die Vektoren $\beta_1(x), \dots, \beta_n(x)$ für alle $x \in U$ linear unabhängig sind. Dadurch können wir die Krümmungsform Ω_i^j wie folgt definieren:

Definition 2.2.2 (Krümmungsform) [Bä, S. 2] Es seien X, Y, R und β_i wie oben angegeben. Dann ist die Krümmungsform Ω_i^j gegeben durch

$$\Omega_i^j(X, Y)\beta_j := R(X, Y)\beta_i,$$

wobei nach Einsteinscher Summenkonvention über doppelt auftretende Indizes (hier $j = 1, \dots, n$) summiert wird.

Da R in X und Y antisymmetrisch ist, ist Ω_i^j eine \mathbb{C} -wertige 2-Form.

Andererseits können wir Ω_i^j auch als Matrix auffassen. Diese hat dann Einträge in der \mathbb{C} -Algebra der geraden komplexwertigen Funktionen.

Definition 2.2.3 (Krümmungsmatrix) [Bä, S. 2] In der zuvor beschriebenen Situation spricht man von der Krümmungsmatrix Ω von ∇ bzgl. der Schnitte β_1, \dots, β_n .

Damit können wir nun die Euler-Klasse wie folgt definieren:

Definition 2.2.4 (Euler-Klasse) [Bä, S. 23 f.] Sei $\xi = (E, \pi, M)$ ein reelles orientiertes Vektorraumbündel vom Rang $n = 2m$. Ferner sei g eine Riemannsche Metrik und ∇ ein metrischer Zusammenhang. Dann definieren wir die Euler-Klasse $\chi(\xi)$ durch die Vorschrift

$$\chi(\xi) = \text{Pf}\left(\frac{1}{2\pi}\Omega\right) \in H^n(M; \mathbb{R}),$$

wobei Ω die Krümmungsmatrix bezüglich eines lokalen orthonormalen Rahmens bezeichne.

Die Euler-Klasse erfüllt wie alle anderen charakteristischen Klassen auch die zu Beginn dieses Kapitels vorgestellten Axiome:

Lemma 2.2.5 [Hat, S. 91: Proposition 3.13]

- (i) Die Orientierung eines Vektorraumbündels $\xi = (E, \pi, M)$ induziert eine Orientierung des Pullback-Bündels $f^*(\xi)$, sodass $\chi(f^*(\xi)) = f^*(\chi(\xi))$.
- (ii) Die Orientierung zweier Vektorraumbündel $\xi_1 = (E_1, \pi, M)$ und $\xi_2 = (E_2, \pi, M)$ gibt eine Orientierung der Whitney-Summe beider Vektorraumbündel vor. Dabei ist $\chi(\xi_1 \oplus \xi_2) = \chi(\xi_1) \cdot \chi(\xi_2)$ erfüllt.
- (iii) Wenn die Fasern von ξ ungerade Dimension haben, so gilt $\chi(\xi) = -\chi(\xi)$.
- (iv) Es gilt $\chi(\xi) = 0$, falls ξ einen nirgendwo verschwindenden Schnitt besitzt.

2.3. Chern-Klassen

Bei der Definition der Chern-Klassen gehen wir analog zu [Bä] vor.

Dazu betrachten wir ein komplexes Vektorraumbündel $\xi := (E, \pi, M)$ über einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M . Sei außerdem $G := GL(n, \mathbb{C})$ die allgemeine lineare Gruppe der regulären $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{C} und $g := \text{Mat}(n, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{n^2}$ der Raum aller $(n \times n)$ -Matrizen über \mathbb{C} .

Definition 2.3.1 (Invariantes Polynom) [Bä, S. 1: Definition 1.1] Eine polynomiale Funktion $\mathbb{P}: g \rightarrow \mathbb{C}$ heißt invariantes Polynom, wenn für alle $A \in g$ und $B \in G$ gilt:

$$\mathbb{P}(BAB^{-1}) = \mathbb{P}(A).$$

2. Charakteristische Klassen

Wir wollen nun untersuchen, wie sich ein invariantes Polynom $\mathbb{P}: g \rightarrow \mathbb{C}$ unter Anwendung von verschiedenen Trivialisierungen verhält. Seien dazu $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ und $\tilde{\beta} = (\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n)$ zwei Trivialisierungen von E über der gleichen offenen Menge U . Ferner bezeichnen Ω und $\tilde{\Omega}$ die Krümmungsmatrizen von β bzw. $\tilde{\beta}$. Sei nun $\Phi: U \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ die Transformation, welche β in $\tilde{\beta}$ überführt. Dann gilt

$$(2.3.1) \quad \tilde{\Omega}(X, Y) = \Phi \cdot \Omega(X, Y) \cdot \Phi^{-1}.$$

Wenden wir nun \mathbb{P} auf beide Seiten von (2.3.1) an, so erhalten wir folgende Aussage:

Lemma 2.3.2 [Bä, S. 2: Lemma 1.5] Sind β_1, \dots, β_n und $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_n$ zwei Trivialisierungen von ξ über U , Ω beziehungsweise $\tilde{\Omega}$ die Krümmungsmatrizen und $\mathbb{P}: g \rightarrow \mathbb{C}$ ein invariantes Polynom, so gilt

$$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\tilde{\Omega}).$$

Damit haben wir gezeigt, dass $\mathbb{P}(\Omega)$ unabhängig von der Wahl der zugrunde liegenden Trivialisierung ist, weshalb wir nun $\mathbb{P}_\nabla := \mathbb{P}(\Omega)$ für einen Zusammenhang ∇ definieren können, wobei \mathbb{P}_∇ im Raum der \mathbb{C} -wertigen 2-Formen liegt.

Darüber hinaus kann man zeigen, dass \mathbb{P}_∇ geschlossen ist. Der Beweis dieser Aussage kann in [Bä, S. 4: Beweis von Lemma 1.8] nachgelesen werden.

Sei nun ω die Zusammenhangsmatrix von ∇ bezüglich des Rahmens β_1, \dots, β_n , das heißt

$$\omega = \omega_i^j \text{ mit } \nabla_X \beta_i = \omega(X)_i^j \beta_j,$$

wobei nach Einsteinscher Summenkonvention über doppelt auftauchende Indizes (hier j) summiert wird. Dann gelten folgende Zusammenhänge zwischen ω und der Krümmungsmatrix Ω :

Lemma 2.3.3 [Bä, S. 3: Lemma 1.7] Wir erhalten folgende Aussagen:

$$\Omega = d\omega - \omega \wedge \omega \text{ und } d\Omega = \omega \wedge \Omega - \Omega \wedge \omega$$

Beweis: Es seien $p \in M$ und $X_p, Y_p \in T_p M$ Tangentialvektoren. Diese setzen wir in Vektorfeldern X und Y so fort, dass $\nabla X_p = \nabla Y_p = 0$ und damit auch $[X, Y]_p = 0$. Dann gilt in p unter Verwendung der Einsteinschen Summenkonvention:

$$\begin{aligned} \Omega_i^j(X, Y)\beta_j &= R(X, Y)\beta_i \\ &= \nabla_X \nabla_Y \beta_i - \nabla_Y \nabla_X \beta_i \\ &= \nabla_X (\omega_i^k(Y)\beta_k) - \nabla_Y (\omega_i^k(X)\beta_k) \\ &= \omega_i^k(Y)\omega_k^l(X)\beta_l - \omega_i^k(X)\omega_k^l(Y)\beta_l + \partial_X \omega_i^k(Y)\beta_k - \partial_Y \omega_i^k(X)\beta_k \\ &= \left(\partial_X \omega_i^j(Y) - \partial_Y \omega_i^j(X) + \omega_i^k(Y)\omega_k^j(X) - \omega_i^k(X)\omega_k^j(Y) \right) \beta_j \end{aligned}$$

Damit gilt $\Omega_i^j = d\omega_i^j - \omega_k^j \wedge \omega_i^k$.

Die zweite Gleichung folgt nun unmittelbar aus

$$\begin{aligned} d\Omega &= d^2\omega - d\omega \wedge \omega + \omega \wedge d\omega \\ &= 0 - (\Omega + \omega \wedge \omega) \wedge \omega + \omega \wedge (\Omega + \omega \wedge \omega) \\ &= -\Omega \wedge \omega + \omega \wedge \Omega. \end{aligned}$$

□

Wir betrachten nun analog zu $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ die Menge $H^{**}(M; \mathbb{C})$, die aus allen unendlichen Summen der Form

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \dots \text{ mit } a_i \in H^{2i}(M; \mathbb{C})$$

bestehe. Betrachte auf $H^{**}(M; \mathbb{C})$ die analoge Multiplikation zu jener auf $H^*(M; \mathbb{C})$: Für $a_0 + a_1 + a_2 + \dots$ und $b_0 + b_1 + b_2 + \dots \in H^*(M; \mathbb{C})$ sei

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 + a_2 + \dots) \cdot (b_0 + b_1 + b_2 + \dots) &:= (a_0 b_0) \\ &+ (a_1 b_0 + a_0 b_1) \\ &+ (a_2 b_0 + a_1 b_1 + a_0 b_2) \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Mit dieser Multiplikation wird $H^{**}(M; \mathbb{C})$ wie zuvor auch $H^*(M; \mathbb{C})$ zu einem Ring. Da \mathbb{P}_∇ geschlossen ist, definiert es eine Kohomologieklassse $[\mathbb{P}_\nabla] \in H^{**}(M; \mathbb{C})$.

Bemerkung 2.3.4 [Bä, S. 5] Wir betrachten nun das zurückgezogene Bündel $f^*\xi$ von $\xi = (E, \pi, M)$, wobei $f: N \rightarrow M$ eine differenzierbare Abbildung sei. Dann induziert ∇ einen Zusammenhang $f^*\nabla$ auf f^*E . Dieser ist wie folgt gegeben: Ist ω die Zusammenhangsmatrix von ∇ bzgl. der n Schnitte β_1, \dots, β_n , so ist $f^*\omega$ die Zusammenhangsmatrix von $f^*\nabla$ bzgl. $\beta_1 \circ f, \dots, \beta_n \circ f$.

Für die Krümmungsform gilt dann

$$\begin{aligned} \Omega^{f^*\nabla} &= d(f^*\omega) - f^*\omega \wedge f^*\omega \\ &= f^*(d\omega - \omega \wedge \omega) \\ &= f^*\Omega. \end{aligned}$$

Dadurch ergibt sich $\mathbb{P}(\Omega^{f^*\nabla}) = \mathbb{P}(f^*\Omega) = f^*\mathbb{P}(\Omega)$ und weiter

$$[\mathbb{P}_{f^*\nabla}] = f^*[\mathbb{P}_\nabla] \in H^{2k}(N; \mathbb{C}).$$

Damit können wir nun folgenden Satz formulieren und beweisen:

2. Charakteristische Klassen

Satz 2.3.5 [Bä, S. 6] Die Kohomologieklass

$$[\mathbb{P}(E)] := [\mathbb{P}_\nabla] \in H^{**}(M; \mathbb{C})$$

ist unabhängig von der Wahl des Zusammenhangs ∇ . Außerdem gilt

$$[\mathbb{P}(f^*E)] = f^*[\mathbb{P}(E)].$$

Beweis: Seien ∇ und $\tilde{\nabla}$ zwei Zusammenhänge auf E , $X := M \times [0, 1]$ und $\pi: X \rightarrow M$ eine Projektionsabbildung. Dann werden durch $\pi^*\nabla$ und $\pi^*\tilde{\nabla}$ zwei Zusammenhänge auf π^*E definiert, wobei es sich bei π^*E um ein Vektorraumbündel über X handelt. Definiere nun einen Zusammenhang ∇^* auf π^*E wie folgt: Für $v \in T_pX$ sei für ein $\lambda \in [0, 1]$

$$\nabla_v^* s = (1 - \lambda)(\pi^*\nabla_v s) + \lambda(\pi^*\tilde{\nabla}_v s).$$

Ferner bezeichne $i_\lambda: M \rightarrow X, p \mapsto (p, \lambda)$ die Inklusionsabbildung. Dann gilt auf E

$$i_\lambda^* \nabla^* = (1 - \lambda)\nabla + \lambda\tilde{\nabla}.$$

Aufgrund der Homotopie der Inklusionen i_0 und i_1 induzieren die beiden Abbildungen auf der Kohomologie dieselbe Abbildung $i_0^* = i_1^*$. Damit folgt

$$[\mathbb{P}_\nabla] = i_1^*[\mathbb{P}_{\nabla^*}] = i_0^*[\mathbb{P}_{\nabla^*}] = [\mathbb{P}_{\tilde{\nabla}}].$$

□

Mit Hilfe dieser Resultate können wir nun die Chern-Klasse definieren:

Definition 2.3.6 (Chern-Klasse) [Bä, S. 6: Definitionen 1.10 und 1.11] Sei

$$\mathbb{P}(A) := \det\left(1 + \frac{1}{2\pi i} A\right).$$

Dann heißt

$$\gamma(E) := [\mathbb{P}(E)] \in H^{**}(M; \mathbb{C})$$

die totale Chern-Klasse von E . Ferner setzen wir

$$\gamma_k(E) := [\mathbb{P}_k(\Omega^E)] \in H^{2k}(M; \mathbb{C})$$

mit

$$\mathbb{P}_k(A) := \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \det(A)$$

und nennen γ_k die k -te Chern-Klasse.

Bemerkung 2.3.7 Zwischen der totalen Chern-Klasse und den k -ten Chern-Klassen ergibt sich folgender Zusammenhang:

$$\gamma(E) = \gamma_0(E) + \dots + \gamma_n(E).$$

Proposition 2.3.8 [Bä, S. 10: Proposition 1.15] Ist das Vektorraumbündel $\xi = (E, \pi, M)$ trivial, so gilt $\gamma(\xi) = 1 \in H^0(M; \mathbb{R})$.

Beweis: Da ξ trivial ist, findet man einen flachen Zusammenhang ∇ auf E . Dadurch ist die Krümmungsmatrix Ω die Nullmatrix und somit $\mathbb{P}_\nabla \equiv 1$. \square

Wir möchten nun die totale Chern-Klasse einer Whitney-Summe zweier Vektorraumbündel berechnen. Dafür gilt folgender Satz:

Satz 2.3.9 [Bä, S. 8: Satz 1.12] Seien $\xi_1 = (E_1, \pi_1, M)$ und $\xi_2 = (E_2, \pi_2, M)$ zwei Vektorraumbündel. Dann gilt für die Chern-Klasse:

$$\gamma(\xi_1 \oplus \xi_2) = \gamma(\xi_1) \cdot \gamma(\xi_2)$$

Beweis: Es sei ∇^i für $i = 1, 2$ der Zusammenhang auf ξ_i . Dann wird durch

$$\nabla_X(\beta_1 \oplus \beta_2) = (\nabla_X^1 \beta_1) \oplus (\nabla_X^2 \beta_2)$$

ein Zusammenhang auf $\xi_1 \oplus \xi_2$ definiert. Dabei seien β_1, β_2 Schnitte in ξ_1 bzw. ξ_2 . Die Krümmungsform Ω von ∇ hat dann die Gestalt

$$\Omega^\nabla = \begin{bmatrix} \Omega^{\nabla^1} & 0 \\ 0 & \Omega^{\nabla^2} \end{bmatrix}$$

Setzt man dies in die Definition von γ ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \gamma(\xi_1 \oplus \xi_2) &= \det \left(1 + \frac{1}{2\pi i} \Omega^\nabla \right) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2\pi i} \Omega^{\nabla^1} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{1}{2\pi i} \Omega^{\nabla^2} \end{pmatrix} \\ &= \det \left(1 + \frac{1}{2\pi i} \Omega^{\nabla^1} \right) \cdot \det \left(1 + \frac{1}{2\pi i} \Omega^{\nabla^2} \right) \\ &= \gamma(\xi_1) \cdot \gamma(\xi_2). \end{aligned}$$

\square

Bemerkung 2.3.10 Die Produktformel können wir auch schreiben als

$$(2.3.2) \quad \gamma_n(\xi_1 \oplus \xi_2) = \sum_{i+j=n} \gamma_i(\xi_1) \cdot \gamma_j(\xi_2).$$

2. Charakteristische Klassen

Wir wollen nun die Chern-Klasse vom komplex konjugierten Bündel $\bar{\xi}$ eines Vektorraumbündels $\xi = (E, \pi, M)$ berechnen.

Lemma 2.3.11 [MS74, S. 168: Lemma 14.9] *Es gilt*

$$\gamma_k(\bar{\xi}) = (-1)^k \gamma_k(\xi).$$

Demnach gilt für die totale Chern-Klasse

$$\gamma(\bar{\xi}) = 1 - \gamma_1(\xi) + \gamma_2(\xi) - \dots \pm \gamma_n(\xi).$$

Beweis: Es sei $p \in M$ und E_p eine Faser von ξ . Wähle eine komplexe Basis v_1, \dots, v_n von E_p . Dann bildet die Menge $v_1, iv_1, \dots, v_n, iv_n$ eine Basis des untergeordneten Vektorraums $(E_p)_{\mathbb{R}}$. Diese Basis bestimmt auch die Orientierung von $(E_p)_{\mathbb{R}}$. Gleichermäßen gibt auch die Basis $v_1, -iv_1, \dots, v_n, -iv_n$ eine Orientierung für den konjugierten Vektorraum vor. Demnach haben die Vektorraumbündel ξ und $\bar{\xi}$ bei geradem n die gleiche Orientierung. Bei ungeradem n ist die Orientierung genau umgekehrt. Es folgt nun, dass die letzte Chern-Klasse $\gamma_n(\xi)$ die Gleichung $\gamma_n(\xi) = (-1)^n \gamma_n(\bar{\xi})$ erfüllt. Für $k < n$ ist eine andere Herangehensweise vonnöten, die in [MS74, S. 168: Beweis zu Lemma 14.9] vorgestellt wird. \square

Beispiel 2.3.12 [MS74, S. 169: Theorem 14.10] Die totale Chern-Klasse des Tangentialbündels τ^n des komplex projektiven Raums $\mathbb{C}P^n$ ist gegeben durch

$$\gamma(\tau^n) = (1 + a)^{n+1},$$

wobei $a = -\gamma_1(\rho)$ ein Erzeuger der Gruppe $H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ sei. Dabei bezeichne ρ das kanonische Geradenbündel des $\mathbb{C}P^n$.

Dabei sind die i -ten Chern-Klassen gegeben durch²⁾

$$\gamma_i(\tau) = \binom{n+1}{i} \cdot a^i.$$

Der Beweis findet sich in [MS74, S. 169 f.].

2.4. Pontryagin-Klassen

Wir wollen nun die Pontryagin-Klassen eines reellen Vektorraumbündels betrachten. Unser Ziel ist es, alle charakteristischen Klassen für reelle Vektorraumbündel

²⁾vgl. auch [MS74, S. 184]

mit ganzzahligen Koeffizienten zu finden. Wir möchten $H^*(M; \mathbb{Z})$, den Ring aller unendlichen Summen der Form

$$a = a_0 + a_1 + a_2 + \dots \text{ mit } a_i \in H^i(M; \mathbb{Z}),$$

durch die Pontryagin-Klassen erzeugen. Die Basis dafür werden wir in diesem Kapitel liefern, während es uns erst in Kapitel 4 vollständig gelingen wird, den Ring $H^*(G_n; \mathbb{Z})$ durch Pontryagin-Klassen zu beschreiben.

Für die Definition der Pontryagin-Klassen betrachten wir zunächst die Komplexifizierung $\xi_{\mathbb{C}} = \xi \otimes \mathbb{C}$ eines reellen Vektorraumbündels $\xi = (E, \pi, M)$. Dann ist die totale Chern-Klasse $\gamma(\xi_{\mathbb{C}})$ nach Definition 2.3.6 gegeben durch

$$\gamma(\xi_{\mathbb{C}}) = 1 + \gamma_1(\xi_{\mathbb{C}}) + \gamma_2(\xi_{\mathbb{C}}) + \dots + \gamma_n(\xi_{\mathbb{C}}) = 1 + \sum_{k=1}^n \gamma_k(\xi_{\mathbb{C}}).$$

Nach Lemma 2.3.11 ist $\gamma_i(\overline{\xi_{\mathbb{C}}}) = (-1)^i \gamma_i(\xi_{\mathbb{C}})$. Da $\xi_{\mathbb{C}}$ isomorph zu $\overline{\xi_{\mathbb{C}}}$ ist, gilt zudem $\gamma(\xi_{\mathbb{C}}) = \gamma(\overline{\xi_{\mathbb{C}}})$, das heißt

$$\begin{aligned} \gamma(\overline{\xi_{\mathbb{C}}}) &= 1 - \gamma_1(\xi_{\mathbb{C}}) + \gamma_2(\xi_{\mathbb{C}}) \mp \dots \pm \gamma_n(\xi_{\mathbb{C}}) \\ (2.4.1) \quad &= 1 + \gamma_1(\xi_{\mathbb{C}}) + \gamma_2(\xi_{\mathbb{C}}) + \dots + \gamma_n(\xi_{\mathbb{C}}) \\ &= \gamma(\xi_{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zur Aussage, dass alle ungeraden Chern-Klassen des komplexifizierten Vektorraumbündels dem Nullelement in der Kohomologiekategorie entsprechen.

Die Pontryagin-Klasse definieren wir deshalb wie folgt:

Definition 2.4.1 (Pontryagin-Klasse) [MS74, S. 174] Sei $\xi = (E, \pi, M)$ ein reelles Vektorraumbündel. Dann ist die k -te Pontryagin-Klasse $p_k(\xi) \in H^{4k}(B; \mathbb{Z})$ gegeben durch

$$(2.4.2) \quad p_k(\xi) = (-1)^k \cdot c_{2k}(\xi_{\mathbb{C}})$$

Analog zur totalen Chern-Klasse ist die totale Pontryagin-Klasse definiert als

$$p(\xi) = 1 + p_1(\xi) + \dots + p_l(\xi),$$

wobei $l := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Dabei ist die Pontryagin-Klasse einer Mannigfaltigkeit definiert als jene von ihrem Tangentialbündel.

Bemerkung 2.4.2 Die Verwendung des Vorzeichens $(-1)^k$ bei der Definition der k -ten Pontryagin-Klasse wird sich später erklären, wenn wir die Produktformel beweisen.

2. Charakteristische Klassen

Bemerkung 2.4.3 Da $\gamma_i(\xi) = 0$ für $i > \dim \xi$, ist $p_i = 0$ für $i > l$.

Wir wollen nun analoge Axiome, wie wir sie bereits für die anderen charakteristischen Klassen bewiesen haben, auch für die Pontryagin-Klassen finden.

Lemma 2.4.4 [MS74, S. 174: Lemma 15.2] *Es sei η ein triviales Vektorraumbündel vom Rang k und $\xi := (E, \pi, M)$ ein Vektorraumbündel. Dann erfüllt die Pontryagin-Klasse die Gleichung*

$$p(\xi \oplus \eta) = p(\xi).$$

Beweis: Nach Definition ist

$$\begin{aligned} p(\xi \oplus \eta) &= 1 + p_1(\xi \oplus \eta) + \dots + p_k(\xi \oplus \eta) \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \gamma_{2i}((\xi \oplus \eta)_{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

Mit Gleichung (2.3.2) berechnet sich dies zu

$$\sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \gamma_{2i}((\xi \oplus \eta)_{\mathbb{C}}) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \sum_{k+l=2i} \gamma_k(\xi_{\mathbb{C}}) \cdot \gamma_l(\eta_{\mathbb{C}}).$$

Da η und damit auch $\eta_{\mathbb{C}}$ ein triviales Bündel ist, ist $\gamma_k(\eta_{\mathbb{C}}) = 1$. Dies führt auf

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \sum_{k+l=2i} \gamma_k(\xi_{\mathbb{C}}) \cdot \gamma_l(\eta_{\mathbb{C}}) &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \sum_{k+l=2i} \gamma_k(\xi_{\mathbb{C}}) \\ &= \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^i \gamma_{2i}(\xi_{\mathbb{C}}) \\ &= p(\xi). \end{aligned}$$

□

Wir haben bereits in Satz 2.3.9 gesehen, dass die totale Chern-Klasse einer Whitney-Summe die Gleichung

$$\gamma(\xi_1 \oplus \xi_2) = \gamma(\xi_1) \cdot \gamma(\xi_2)$$

erfüllt. Nun wollen wir eine analoge Aussage für die Pontryagin-Klassen finden. Da wir die ungeraden Chern-Klassen bei der Definition der Pontryagin-Klasse vernachlässigt haben, können wir jedoch nur folgende abgeschwächte Aussage treffen:

Satz 2.4.5 [MS74, S. 175: Theorem 15.3] Seien $\xi_1 = (E_1, \pi_1, M)$ und $\xi_2 = (E_2, \pi_2, M)$ Vektorraumbündel. Dann ist die totale Pontryagin-Klasse $p(\xi_1 \oplus \xi_2)$ kongruent zum Produkt der einzelnen Pontryagin-Klassen modulo der Elemente mit Ordnung 2, mit anderen Worten

$$p_k(\xi_1 \oplus \xi_2) \equiv \sum_{i+j=k} p_i(\xi_1) \cdot p_j(\xi_2) \pmod{\text{Elemente der Ordnung 2.}}$$

Beweis: Da $(\xi_1 \oplus \xi_2) \otimes \mathbb{C}$ isomorph zu $(\xi_1 \otimes \mathbb{C}) \oplus (\xi_2 \otimes \mathbb{C})$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} \gamma_k((\xi_1 \oplus \xi_2) \otimes \mathbb{C}) &= \sum_{i+j=k} \gamma_i(\xi_1 \otimes \mathbb{C}) \cdot \gamma_j(\xi_2 \otimes \mathbb{C}) \\ (2.4.3) \qquad \qquad \qquad &= \sum_{i+j=k} \gamma_i((\xi_1)_{\mathbb{C}}) \cdot \gamma_j((\xi_2)_{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

Da bei der Definition der Pontryagin-Klasse die ungeraden Chern-Klassen vernachlässigt wurden, ergibt sich mit (2.4.3)

$$(2.4.4) \quad \gamma_{2k}(\xi_{\mathbb{C}}) \equiv \sum_{i+j=k} \gamma_{2i}((\xi_1)_{\mathbb{C}}) \cdot \gamma_{2j}((\xi_2)_{\mathbb{C}}) \pmod{\text{Elemente der Ordnung 2.}}$$

Multiplizieren wir nun beide Seiten der Kongruenz (2.4.4) modulo der Elemente der Ordnung 2 mit $(-1)^k = (-1)^i \cdot (-1)^j$, so erhalten wir

$$p_k(\xi_1 \oplus \xi_2) \equiv \sum_{i+j=k} p_i(\xi_1) \cdot p_j(\xi_2) \pmod{\text{Elemente der Ordnung 2.}}$$

□

Beispiel 2.4.6 [MS74, S. 175] Betrachte das Tangentialbündel τ der Sphäre S^n . Sei ν der äußere Einheitsnormalenvektor. Dann ist die Whitney-Summe $\tau \oplus \nu \cong \tau \oplus \eta$ trivial, wobei η ein triviales Bündel sei. Mit Lemma 2.4.4 folgt dann $p(\tau) = 1$.

3. Zusammenhänge mit anderen charakteristischen Klassen

In diesem Kapitel wollen wir Zusammenhänge zwischen den Pontryagin- und den anderen charakteristischen Klassen herstellen.

3.1. Zusammenhang zwischen Pontryagin- und Chern-Klassen

Satz 3.1.1 [MS74, S. 177: Corollary 15.5] Sei $\xi = (E, \pi, M)$ ein reelles Vektorraumbündel vom Rang n . Dann sind die Pontryagin-Klassen $p_k(\xi)$ durch die Chern-Klassen $\gamma_k(\xi_{\mathbb{C}})$ festgelegt. Es gilt

$$(3.1.1) \quad 1 - p_1 + p_2 - + \dots \pm p_n = (1 - \gamma_1 + \gamma_2 - + \dots \pm \gamma_n) \cdot (1 + \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n).$$

Beweis: Es gilt

$$\begin{aligned} ((1 - \gamma_1 + \gamma_2 - + \dots \pm \gamma_n) \cdot (1 + \gamma_1 + \dots + \gamma_n))(\xi) &= \gamma(\bar{\xi}) \cdot \gamma(\xi) \\ &= \gamma(\bar{\xi} \oplus \xi) \\ &= \gamma(\xi_{\mathbb{C}}) \\ (3.1.2) \quad &= 1 + \gamma_1(\xi_{\mathbb{C}}) + \dots + \gamma_n(\xi_{\mathbb{C}}). \end{aligned}$$

Als Resultat aus Gleichung (2.4.1) haben wir gesehen, dass die ungeraden Chern-Klassen $\gamma_i(\xi_{\mathbb{C}}) = (-1)^i \gamma(\xi_{\mathbb{C}})$ erfüllen, weshalb sich Gleichung (3.1.2) zu

$$1 + \gamma_2(\xi_{\mathbb{C}}) + \dots + \gamma_{2 \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}(\xi_{\mathbb{C}})$$

vereinfacht. Dies entspricht gerade der linken Seite in (2.4.3), was den Beweis beendet. □

Bemerkung 3.1.2 [MS74, S. 177: Corollary 15.5] Zwischen der k -ten Pontryagin-Klasse und den Chern-Klassen lässt sich folgender Zusammenhang zeigen:

$$(3.1.3) \quad p_k(\xi_{\mathbb{R}}) = \gamma_k(\xi)^2 - 2\gamma_{k-1}(\xi)\gamma_{k+1}(\xi) + - \dots \pm 2\gamma_1(\xi)\gamma_{2k-1}(\xi) \mp 2\gamma_{2k}(\xi).$$

3. Zusammenhänge mit anderen charakteristischen Klassen

Wir können nun die Pontryagin-Klasse einer komplexen Mannigfaltigkeit berechnen.

Beispiel 3.1.3 [BT82, S. 290: Example 22.8]¹⁾ Sei M eine komplexe Mannigfaltigkeit. Dann ist die Pontryagin-Klasse von M definiert als jene der untergeordneten reellen Mannigfaltigkeit $M_{\mathbb{R}}$. Da die Pontryagin-Klasse einer Mannigfaltigkeit als die Klasse des Tangentialbündels definiert ist, ist die Pontryagin-Klasse von M letzten Endes die Pontryagin-Klasse des Tangentialbündels $\tau_{\mathbb{R}}$ an $M_{\mathbb{R}}$. Dabei ist $\tau_{\mathbb{R}}$, wie in Kapitel 1.2, definiert das dem Tangentialbündel an M untergeordnete reelle Vektorraumbündel. Sei $\tilde{p} := 1 - p_1 + p_2 - \dots \pm p_n = 1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n$. Dann erhalten wir unter Verwendung von Satz 3.1.1 die Gleichung

$$\tilde{p}(M) := \tilde{p}(\tau) := \tilde{p}(\tau_{\mathbb{R}}) = \gamma(\tau_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{C}) = \gamma(\tau \oplus \bar{\tau}) = \gamma(\tau) \cdot \gamma(\bar{\tau}).$$

Mit Hilfe von Gleichung (3.1.1) können wir nun die totale Pontryagin-Klasse des Tangentialbündels τ des komplex projektiven Raums $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ berechnen:

Beispiel 3.1.4 [MS74, S. 177: Example 15.6] Nach Beispiel 2.3.12 ist die totale Chern-Klasse $\gamma(\tau)$ des $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ gegeben durch $(1+a)^{n+1}$, wobei $a = -\gamma_1(\rho)$ ein geeignet gewählter Erzeuger der Gruppe $H^2(\mathbb{C}\mathbb{P}^n; \mathbb{Z})$ sei. Dabei bezeichne ρ das kanonische Geradenbündel des $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Die einzelnen Pontryagin-Klassen sind dann gegeben durch

$$p_k(\mathbb{C}\mathbb{P}^n) = \binom{n+1}{k} \cdot a^{2k}$$

für $1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Dadurch ergibt sich die totale Pontryagin-Klasse $1 + p_1 + \dots + p_n$ nun durch Aufsummieren der einzelnen p_k als $(1 + a^2)^{n+1}$.

Wir können nun die totalen Pontryagin-Klassen für verschiedene n explizit ausrechnen und erhalten

$$\begin{aligned} p(\mathbb{C}\mathbb{P}^1) &= 1 \\ p(\mathbb{C}\mathbb{P}^2) &= 1 + 3a^2 \\ p(\mathbb{C}\mathbb{P}^3) &= 1 + 4a^2 \\ p(\mathbb{C}\mathbb{P}^4) &= 1 + 5a^2 + 10a^4. \end{aligned}$$

¹⁾Da die in [BT82] verwendete Definition der Pontryagin-Klasse nicht mit jener übereinstimmt, die in der vorliegenden Arbeit verwendet wird, wurde das Beispiel an die hier verwendete Definition angepasst.

3.2. Zusammenhang zwischen Pontryagin- und Euler-Klassen

Unser Ziel ist es nun, einen Zusammenhang zwischen den Pontryagin- und den Euler-Klassen herzustellen, wie es uns auch mit den Chern-Klassen gelungen ist. Der folgende Satz stellt diesen gewünschten Zusammenhang her:

Satz 3.2.1 [MS74, S. 179: Corollary 15.8] Sei ξ ein orientiertes Vektorraumbündel vom Rang $2k$. Dann gilt

$$p_k(\xi) = (\chi(\xi))^2.$$

Um diesen Satz zu beweisen, benötigen wir zunächst folgendes Lemma:

Lemma 3.2.2 [MS74, S. 178: Lemma 15.7] Das reelle Vektorraumbündel $(\xi \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ vom Rang n ist isomorph zu $\xi \oplus \xi$. Dabei ist der Isomorphismus genau dann orientierungserhaltend, wenn $\frac{n(n-1)}{2}$ gerade ist.

Beweis: Sei E_p eine Faser von ξ , v_i für $i = 1, \dots, n$ eine geordnete Basis von E_p . Dann bilden die Vektoren $v_1, \iota v_1, \dots, v_n, \iota v_n$ eine geordnete Basis von $(E_p \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$. Diese Basis legt zugleich die gewünschte Orientierung fest.

Da wir $(E_p \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ mit einer reellen direkten Summe $E_p \oplus \iota E_p \cong E_p \oplus E_p$ identifizieren können, bildet $v_1, \dots, v_n, \iota v_1, \dots, \iota v_n$ eine weitere Basis des Raums. Dabei bilden die ersten n Vektoren die Basis von E_p und die letzten n Vektoren bilden die Basis von ιE_p . Der Basiswechsel zwischen beiden Matrizen ist eine Permutation σ mit

$$\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{(n-1)+(n-2)+(n-3)+\dots+1} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

Dieser Isom. ist genau dann orientierungserhaltend, wenn $\text{sgn}(\sigma) = 1$ ist, also wenn $\frac{n(n-1)}{2}$ gerade ist. \square

Mit diesem Lemma und der in [MS74, S. 177] bewiesenen Identität

$$(-1)^k c_{2k}(\xi \otimes \mathbb{C}) = (-1)^k \chi((\xi \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}})$$

können wir nun Satz 3.2.1 beweisen:

Beweis: Nach Definition der Pontryagin-Klasse ist nämlich

$$p_k(\xi) = (-1)^k c_{2k}(\xi \otimes \mathbb{C}) = (-1)^k \chi((\xi \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}).$$

3. Zusammenhänge mit anderen charakteristischen Klassen

Man kann außerdem zeigen, dass die Euler-Klasse

$$\begin{aligned}\chi((\xi \otimes \mathbb{C})_{\mathbb{R}}) &= \chi(\xi \oplus \xi) = (-1)^{2k(2k-1) \cdot \frac{1}{2}} \chi(\xi)^2 \\ &= (-1)^k \chi(\xi)^2\end{aligned}$$

erfüllt²⁾. Daraus folgt die Gleichheit $p_k(\xi) = (\chi(\xi))^2$. □

3.3. Zusammenhang zwischen Pontryagin- und Stiefel-Whitney-Klassen

Einen Zusammenhang zwischen den Pontryagin- und den Stiefel-Whitney-Klassen stellt der folgende Satz her:

Satz 3.3.1 [Hat, S. 94: Proposition 3.15] *Es sei $\xi = (E, \pi, M)$ ein reelles Vektorraumbündel. Dann wird $p_i(\xi)$ unter dem Koeffizientenhomomorphismus, der $H^{4i}(M; \mathbb{Z})$ auf $H^{4i}(M; \mathbb{Z}_2)$ abbildet, auf $w_{2i}(\xi)^2$ abgebildet.*

Für den Beweis von Satz 3.3.1 setzen wir folgendes Lemma voraus:

Lemma 3.3.2 [Hat, S. 83: Proposition 3.8] *Es sei $\xi = (E, \pi, M)$ ein n -dimensionales Vektorraumbündel. Betrachten wir ξ als ein $2n$ -dimensionales reelles Vektorraumbündel, so verschwinden alle ungeraden Stiefel-Whitney-Klassen und $w_{2i}(\xi)$ ist das Bild von $\gamma_i(\xi)$ unter dem Koeffizientenhomomorphismus $H^{2i}(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{2i}(M; \mathbb{Z}_2)$.*

Mit diesem Lemma können wir nun Satz 3.3.1 beweisen:

Beweis: Nach Lemma 3.3.2 wird $c_{2i}(\xi_{\mathbb{C}})$ modulo 2 auf $w_{4i}(\xi \oplus \xi)$ abgebildet. Da die Stiefel-Whitney-Klassen die Produktformel erfüllen, gilt zudem $w_{4i}(\xi \oplus \xi) = w_{2i}(E)^2$. Weil das Quadrieren einen additiven Homomorphismus liefert, sofern man das Ergebnis modulo 2 betrachtet, folgt die Aussage. □

²⁾Dies wurde unter anderem in [MS74, S. 179] gezeigt.

4. Pontryagin-Klassen von Grassmann-Mannigfaltigkeiten

Pontryagin-Klassen können verwendet werden, um die Kohomologie der Grassmann-Mannigfaltigkeiten G_n und \tilde{G}_n mit ganzzahligen Koeffizienten zu beschreiben. Dabei bezeichne \tilde{G}_n die orientierte Grassmann-Mannigfaltigkeit.

Sofern nicht anders angegeben, sei in diesem Kapitel stets $k \geq n$ vorausgesetzt.

Wir werden nun die Kohomologie von \tilde{G}_n mit Koeffizienten in einem Integritätsring Λ betrachten, wobei $\frac{1}{2} \in \Lambda$. Ein Beispiel für einen solchen Integritätsring ist der Ring $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$.

Der folgende Satz stellt einen Zusammenhang zwischen dem Kohomologie-Ring der Grassmann-Mannigfaltigkeit mit Koeffizienten in Λ und den Pontryagin-Klassen her:

Satz 4.1.3 [MS74, S. 179: Theorem 15.9] *Für einen Integritätsring Λ mit $\frac{1}{2} \in \Lambda$ wird der Kohomologiering $H^*(\tilde{G}_{2m+1}; \Lambda)$ als polynomieller Ring über Λ von den Pontryagin-Klassen*

$$p_1(\tilde{y}^{2m+1}), \dots, p_m(\tilde{y}^{2m+1})$$

erzeugt. Dabei bezeichne \tilde{y}^n das orientierte Universalbündel¹⁾.

Der polynomielle Ring $H^(\tilde{G}_{2m}; \Lambda)$ wird von den Pontryagin-Klassen*

$$p_1(\tilde{y}^{2m}), \dots, p_m(\tilde{y}^{2m})$$

sowie von der Euler-Klasse $\chi(\tilde{y}^{2m})$ erzeugt.

Mit anderen Worten: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wird der Ring $H^*(\tilde{G}_n; \Lambda)$ von den charakteristischen Klassen $p_1, \dots, p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ und der Euler-Klasse erzeugt.

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir folgendes Lemma²⁾:

¹⁾Dieses wird in C.2.6 definiert.

²⁾Der Beweis findet sich in [MS74, S. 144 ff.].

4. Pontryagin-Klassen von Grassmann-Mannigfaltigkeiten

Lemma 4.1.4 [MS74, S. 143, Theorem 12.2] Sei $\xi = (E, \pi, M)$ ein orientiertes Vektorraumbündel vom Rang n , E_0 der Raum der Vektoren aus E , die nicht Null sind, und $\pi_0: E_0 \rightarrow M$ die Einschränkung von π auf E_0 . Dann existiert eine Sequenz der Form

$$\dots \rightarrow H^i(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\cup \chi} H^{i+n}(M; \mathbb{Z}) \xrightarrow{\pi_0^*} H^{i+n}(E_0; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{i+1}(B; \mathbb{Z}) \rightarrow \dots$$

Dabei bezeichnet $\cup \chi$ den Homomorphismus $a \mapsto a \cup \chi(\xi)$, wobei χ die Euler-Klasse ist.

Damit können wir nun Satz 4.1.3 beweisen:

Beweis: Für $n = 1$ ist $\tilde{G}_1(\mathbb{R}^k)$ homöomorph zur Einheitskugel S^{k-1} und hat dadurch die Kohomologie eines Punktes in der Dimension $k - 2$. Lässt man nun k gegen unendlich streben, folgt, dass \tilde{G}_1 die Kohomologie eines Punktes in allen Dimensionen hat. Der Induktionsanfang ist also gegeben.

Sei nun die Aussage wahr für \tilde{G}_{n-1} . Dann existiert eine exakte Folge

$$(4.1.1) \quad \dots \rightarrow H^i(\tilde{G}_n; \Lambda) \xrightarrow{\cup \chi} H^{i+n}(\tilde{G}_n; \Lambda) \rightarrow H^{i+n}(\tilde{G}_{n-1}; \Lambda) \xrightarrow{\lambda} H^{i+1}(\tilde{G}_n; \Lambda) \rightarrow \dots$$

wobei χ die Euler-Klasse $\chi(y^n)$ und $\lambda = f^{*-1} \pi_0^*$ den Ringhomomorphismus bezeichne, welcher die Pontryagin-Klassen von \tilde{y}^n auf jene von \tilde{y}^{n-1} abbildet.

Wir betrachten nun nacheinander die Aussage für gerades und ungerades n .

Fall 1: Sei n gerade. In diesem Fall reduziert sich (4.1.1) zu

$$0 \rightarrow H^i(\tilde{G}_n; \Lambda) \xrightarrow{\cup \chi} H^{i+n}(\tilde{G}_n; \Lambda) \xrightarrow{\lambda} H^{i+n}(\tilde{G}_{n-1}; \Lambda) \rightarrow H^{i+1}(\tilde{G}_n; \Lambda).$$

Da nach Induktionsvoraussetzung die Kohomologie von \tilde{G}_{n-1} ein polynomieller Ring ist, der von $p_1, \dots, p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ erzeugt wird, ist $H^*(\tilde{G}_n; \Lambda)$ ein polynomieller Ring, der von $p_1, \dots, p_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1}$ und χ erzeugt wird.

Fall 2: Sei n ungerade. Sei $n = 2m + 1$. Dann ist die Euler-Klasse von y^n mit Koeffizienten in Λ gleich 0, sodass sich die Folge (4.1.1) zu

$$(4.1.2) \quad 0 \rightarrow H^j(\tilde{G}_{2m+1}; \Lambda) \xrightarrow{\lambda} H^j(\tilde{G}_{2m}; \Lambda) \rightarrow H^{j-2m}(\tilde{G}_{2m+1}; \Lambda) \rightarrow 0.$$

Demnach können wir $H^*(\tilde{G}_{2m+1}; \Lambda)$ als einen Unterring von $H^*(\tilde{G}_{2m}; \Lambda)$ betrachten. Sei A die polynomielle Algebra $\Lambda[p_1, \dots, p_m] \subset H^*(\tilde{G}_{2m}; \Lambda)$. Dann ist

$$(4.1.3) \quad A \subset \lambda(H^*(\tilde{G}_{2m+1}; \Lambda)).$$

Zu zeigen ist die Gleichheit.

Zunächst gilt mit (4.1.3)

$$(4.1.4) \quad \text{rang } A^j \leq \text{rang } H^j(\tilde{G}_{2m+1}; \Lambda)$$

für jede Dimension j . Dabei bezeichne der Rang eines Λ -Moduls die maximale Anzahl an linear unabhängigen Vektoren in Λ .

Unter Verwendung der Induktionsvoraussetzung kann jedes Element aus $H^j(\tilde{G}_{2m}; \Lambda)$ auf eindeutige Weise als Summe $a + \chi a'$ mit $a \in A^j$ und $a' \in A^{j-2m}$ geschrieben werden. Dabei bezeichne χ wieder die Euler-Klasse von \tilde{y}^{2m} . Daraus resultiert nun eine direkte Summenzerlegung

$$H^j(\tilde{G}_{2m}; \Lambda) \cong A^j \oplus A^{j-2m}.$$

Aus Dimensionsgründen folgt nun

$$(4.1.5) \quad \text{rang } H^j(\tilde{G}_{2m}; \Lambda) = \text{rang } A^j + \text{rang } A^{j-2m}.$$

Andererseits ergibt sich unter Berücksichtigung von (4.1.2) die Gleichung

$$(4.1.6) \quad \text{rang } H^j(\tilde{G}_{2m}; \Lambda) = \text{rang } H^j(\tilde{G}_{2m+1}; \Lambda) + \text{rang } H^{j-2m}(\tilde{G}_{2m+1}; \Lambda).$$

Kombiniert man nun die Gleichungen (4.1.4), (4.1.5) und (4.1.6), so erhält man

$$\text{rang } A^j = \text{rang } H^j(\tilde{G}_{2m+1}; \Lambda).$$

Damit entspricht A^j dem Bild $\lambda(H^j(\tilde{G}_{2m+1}; \Lambda))$, denn andernfalls würde dieses Bild eine Summe $\tilde{a} = a + \chi(\tilde{y}^{2m})a'$ mit $a' \neq 0$ enthalten. \tilde{a} würde jedoch in keinem linearen Zusammenhang mit den Basiselementen von A^j stehen, sodass in Gleichung (4.1.4) strikte Ungleichheit gelten würde. Dies führt jedoch zu einem Widerspruch. \square

5. Ausblick: Pontryagin-Zahlen

Mit Hilfe der Pontryagin-Klassen kann man die Pontryagin-Zahlen auf einer glatten, kompakten und orientierten Mannigfaltigkeit M der Dimension $4n$ definieren. Die Pontryagin-Zahlen sind dann durch die Formel

$$\langle p_{i_1}(\tau) \cdots p_{i_r}(\tau), \mu_{4n} \rangle$$

gegeben, wobei τ das Tangentialbündel, μ_{4n} die fundamentale Homologie-Klasse und $i_1 + \dots + i_r = n$ eine Partition von n sei.

Wenngleich man die Pontryagin-Klassen auch für Mannigfaltigkeiten definieren kann, deren Dimension nicht durch 4 teilbar ist, schränkt man die Definition auf diesen Fall ein, da andernfalls die Pontryagin-Zahlen verschwinden.

Die Pontryagin-Zahlen sind invariant unter Kobordismen und bestimmen zusammen mit den Stiefel-Whitney-Klassen die Klasse der orientierten Kobordismen einer orientierten Mannigfaltigkeit.

Ist zudem die Pontryagin-Zahl einer Mannigfaltigkeit nicht Null, so folgt daraus, dass auf dieser Mannigfaltigkeit keine orientierungsumkehrenden Diffeomorphismen existieren können, weil die Pontryagin-Klassen bei umgedrehter Orientierung erhalten bleiben, jedoch die fundamentale Homologie-Klasse das Vorzeichen ändert. Demnach wechselt auch das Vorzeichen der Pontryagin-Zahl.

Diese Aussage liefert beispielsweise einen Beweis dafür, dass der komplex projektive Raum $\mathbb{C}P^n$ für gerades n keine orientierungsumkehrenden Diffeomorphismen aufweist.

A. Anhang: (Ko-)Homologie-Gruppen

In diesem Kapitel werden die singulären Homologie- und Kohomologie-Gruppen definiert, da diese in einem übergeordneten Zusammenhang mit den charakteristischen Klassen stehen.

A.1. Singuläre Homologie-Gruppen

Zunächst betrachten wir folgende Definitionen:

Definition A.1.1 (n -Standardsimplex) [MS74, S. 257] Eine konvexe Menge $\Delta_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ heißt n -Standardsimplex, wenn

$$\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : t_i \geq 0 \forall i \text{ und } t_0 + t_1 + \dots + t_n = 1\}$$

Definition A.1.2 (Singulärer n -Simplex) [MS74, S. 257] Eine stetige Abbildung

$$\sigma_n: \Delta_n \rightarrow T$$

von einem n -Standardsimplex in einen topologischen Raum T bezeichnen wir als singulären n -Simplex in X .

Die folgenden Absätze finden sich in [MS74, S. 257] wieder.

Seien Δ_n und σ_n wie in Definition A.1.2. Betrachte nun für $i = 0, \dots, n$ die Abbildungen

$$\sigma_n \circ \Phi_i: \Delta_{n-1} \rightarrow T,$$

wobei Φ_i die lineare Einbettung

$$\begin{aligned} \Phi_i: \Delta_{n-1} &\rightarrow \Delta_n \\ \Phi_i(t_0, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n) &= (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_n) \end{aligned}$$

bezeichne.

Damit können wir nun die singuläre Ketten-Gruppe, welche eine freie abelsche Gruppe, das heißt eine abelsche Gruppe mit Basis ist, wie folgt definieren:

A. Anhang: (Ko-)Homologie-Gruppen

Definition A.1.3 (Singuläre Ketten-Gruppe) [MS74, S. 258] Sei Λ ein kommutativer Ring. Dann ist die singuläre Ketten-Gruppe $C_n(T; \Lambda)$ für $n \geq 0$ der freie Λ -Modul¹⁾, der für jeden singulären n -Simplex σ_n in T von $[\sigma_n]$ erzeugt wird. Für $n < 0$ sei $C_n(T; \Lambda) := 0$.

Betrachte nun den Rand-Homomorphismus

$$\partial_n: C_n(T; \Lambda) \rightarrow C_{n-1}(T; \Lambda),$$

der durch

$$\partial_n[\sigma] = [\sigma \circ \Phi_0] - [\sigma \circ \Phi_1] + \dots + (-1)^n [\sigma \circ \Phi_n]$$

definiert wird.

Da $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$, können wir nun die n -te singuläre Homologie-Gruppe $H_n(T; \Lambda)$ wie folgt definieren:

Definition A.1.4 [MS74, S. 258] Die n -te singuläre Homologie-Gruppe sei der Quotientenraum

$$H_n(T; \Lambda) = \ker(\partial_n) / \text{im}(\partial_{n+1}).$$

A.2. Singuläre Kohomologie-Gruppen

Unter Verwendung von Kapitel A.1 können wir nun die Kohomologie-Gruppen einführen. Dafür benötigen wir einige analoge Definitionen zu denen, die wir in A.1 betrachtet haben.

Definition A.2.1 (Ko-Ketten-Gruppe) [MS74, S. 258] Seien Λ ein kommutativer Ring, T ein topologischer Raum und $C_n(T; \Lambda)$ wie in Definition A.1.3. Dann ist die Ko-Ketten-Gruppe $C^n(T; \Lambda)$ der duale Modul $\text{End}_\Lambda(C_n(T; \Lambda), \Lambda)$ der Λ -linearen Abbildungen von $C_n(T; \Lambda)$ nach Λ .

Notation A.2.2 Für eine Ko-Kette c einer Kette y bezeichne $\langle c, y \rangle \in \Lambda$ den Wert von c .

Wir benötigen nun noch die Definition des Ko-Rands, um dann die singulären Kohomologie-Gruppen zu definieren.

¹⁾Ein Modul über einem kommutativen Ring $(R, +, \cdot)$ ist eine abelsche Gruppe $(M, +)$, die mit einer Skalarmultiplikation ausgestattet ist, die mit der Multiplikation auf R im Sinne der Assoziativität und der Distributivität verträglich ist.

Definition A.2.3 (Ko-Rand) [MS74, S. 258] Sei $c \in C^n(T; \Lambda)$ eine Ko-Kette. Dann ist der Ko-Rand von c definiert als Ko-Kette $\delta c \in C^{n+1}(T; \Lambda)$, wobei der Wert von δc in Bezug auf eine $(n+1)$ -Kette a durch die Gleichung

$$\langle \delta c, a \rangle + (-1)^n \langle c, \delta a \rangle = 0$$

bestimmt sei.

Die Definition der singulären Kohomologie-Gruppe erfolgt nun analog zur Definition der singulären Homologie-Gruppe:

Definition A.2.4 (Singuläre Kohomologie-Gruppe) [MS74, S. 258] Die singuläre n -te Kohomologiegruppe von T ist definiert als Quotientenraum

$$H^n(T; \Lambda) = \ker \delta / \delta C^{n-1}(T; \Lambda).$$

B. Anhang: Komplexifizierungen

B.1. Komplexifizierung von Vektorräumen

Oftmals ist es notwendig, anstelle eines reellen Vektorraums V die Komplexifizierung des Vektorraums zu betrachten. Aus diesem Grund werden diese im Folgenden eingeführt.

Definition B.1.1 (Komplexifizierung eines Vektorraums) [MS74, S. 173] Sei V ein reeller Vektorraum. Der komplexe Vektorraum $V_{\mathbb{C}}$, welcher als Komplexifizierung von V bezeichnet wird, ist das Tensorprodukt

$$V_{\mathbb{C}} := V \otimes \mathbb{C} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in V\}.$$

Dass es sich bei $V_{\mathbb{C}}$ tatsächlich um einen komplexen Vektorraum handelt, zeigt folgendes Lemma:

Lemma B.1.2 $(V_{\mathbb{C}}, +, \cdot)$ bildet mit der Addition und Multiplikation auf \mathbb{C} einen komplexen Vektorraum.

Beweis: Zu überprüfen sind die sieben Vektorraumaxiome.

Seien dazu $a = x_1 + iy_1$, $b = x_2 + iy_2$ und $c = x_3 + iy_3 \in V_{\mathbb{C}}$.

(i) *Assoziativität der Addition.* Es gilt

$$\begin{aligned}(a + b) + c &= ((x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)) + (x_3 + iy_3) \\ &= ((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) + (x_3 + iy_3) \\ &= (x_1 + x_2 + x_3) + i(y_1 + y_2 + y_3) \\ &= (x_1 + iy_1) + ((x_2 + x_3) + i(y_2 + y_3)) \\ &= (x_1 + iy_1) + ((x_2 + iy_2) + (x_3 + iy_3)) \\ &= a + (b + c)\end{aligned}$$

(ii) *Existenz eines neutralen Elements bezüglich Addition.* Es sei $0_V \in V$ das neutrale Element aus V . Dann gilt für $0_{V_{\mathbb{C}}} := 0_V + i0_V \in V_{\mathbb{C}}$

$$0_{V_{\mathbb{C}}} + a = (0_V + i0_V) + x_1 + iy_1 = (0_V + x_1) + i(0_V + y_1) = a.$$

B. Anhang: Komplexifizierungen

Somit ist $0_{V_{\mathbb{C}}}$ das neutrale Element bezüglich Addition.

Da man zeigen kann, dass das neutrale Element eindeutig ist, sofern es existiert, ist $0_{V_{\mathbb{C}}}$ sogar das eindeutig bestimmte Nullelement.

- (iii) *Existenz eines inversen Elements bezüglich Addition.* Sei $a = x_1 + iy_1 \in V_{\mathbb{C}}$. Seien außerdem $-x_1$ und $-y_1$ die inversen Elemente zu x_1 bzw. y_1 bzgl. der Addition auf V . Dann ist $-a := -x_1 - iy_1$ das zu a inverse Element, denn $-a$ erfüllt

$$a + (-a) = (x_1 + iy_1) + (-x_1 - iy_1) = (x_1 + (-x_1)) + i(y_1 + (-y_1)) = 0_V + i0_V = 0_{V_{\mathbb{C}}}.$$

- (iv) *Kommutativität der Addition.* Es gilt

$$a + b = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \stackrel{(*)}{=} (x_2 + x_1) + i(y_1 + y_2) = b + a.$$

Dabei folgt (*) mit der Kommutativität der Addition auf V .

- (v) *Existenz eines neutralen Elements bezüglich Multiplikation.* Es sei $1_V \in V$ das Einselement auf V . Dann ist $1_{V_{\mathbb{C}}} := 1_V + i0_V$ das Einselement auf $V_{\mathbb{C}}$, denn es erfüllt

$$\begin{aligned} a \cdot 1_{V_{\mathbb{C}}} &= (x_1 + iy_1) \cdot (1_V + i0_V) = (x_1 \cdot 1_V) + (x_1 \cdot i0_V) + (iy_1 \cdot 1_V) + (iy_1 \cdot i0_V) \\ &= x_1 + iy_1 = a. \end{aligned}$$

Obige Rechnung folgt unter Berücksichtigung der Rechenregeln auf V .

- (vi) *Assoziativität der Multiplikation.* Folgende Gleichung zeigt das Gewünschte:

$$\begin{aligned} (a \cdot b) \cdot c &= ((x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2)) \cdot (x_3 + iy_3) \\ &= (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2 + i \cdot (y_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot y_2)) \cdot (x_3 + iy_3) \\ &= x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 - y_1 \cdot y_2 \cdot x_3 - x_1 \cdot x_2 \cdot y_3 - x_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \\ &\quad + i(x_1 \cdot x_2 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 + y_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot y_2 \cdot x_3) \\ &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 \cdot x_3 - y_2 \cdot y_3 + i(y_2 \cdot x_3 + x_2 \cdot y_3)) \\ &= (x_1 + iy_1) \cdot ((x_2 + iy_2) \cdot (x_3 + iy_3)) \\ &= a \cdot (b \cdot c). \end{aligned}$$

- (vii) *Distributivgesetze.* Wegen

$$\begin{aligned} a \cdot (b + c) &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2 + x_3 + iy_3) \\ &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + x_3 + i(y_2 + y_3)) \\ &= x_1 \cdot (x_2 + x_3) + i(x_1 \cdot (y_2 + y_3) + y_1 \cdot (x_2 + x_3)) - y_1 \cdot (y_2 + y_3) \\ &= x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + i(x_1 \cdot y_2 + x_1 \cdot y_3 + y_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot x_3) - y_1 \cdot y_2 - y_1 \cdot y_3 \\ &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) + (x_1 + iy_1) \cdot (x_3 + iy_3) \\ &= a \cdot b + a \cdot c \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 (a + b) \cdot c &= (x_1 + iy_1 + x_2 + iy_2) \cdot (x_3 + iy_3) \\
 &= x_1 \cdot x_3 + iy_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 + iy_2 \cdot x_3 + ix_1 \cdot y_3 - y_1 \cdot y_3 + ix_2 \cdot y_3 - iy_2 \cdot y_3 \\
 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_3 + iy_3) + (x_2 + iy_2) \cdot (x_3 + iy_3) \\
 &= a \cdot c + b \cdot c
 \end{aligned}$$

gelten die Distributivgesetze auch auf $V_{\mathbb{C}}$.

Damit handelt es sich bei $V_{\mathbb{C}}$ um einen komplexen Vektorraum. □

Bemerkung B.1.3 Man kann $V_{\mathbb{C}}$ als direkte Summe $V_{\mathbb{C}} = V \oplus iV$ schreiben.

B.2. Komplexifizierung von Vektorraumbündeln

Analog zur Komplexifizierung eines Vektorraums definiert man die Komplexifizierung eines Vektorraumbündels.

Seien dazu E und M zwei differenzierbare Mannigfaltigkeiten und $\xi := (E, \pi, M)$ ein reelles Vektorraumbündel vom Rang n . Ferner sei für ein beliebiges $p \in M$ $E_p := \pi^{-1}(p)$ eine Faser von π . Dann definiert man die Komplexifizierung von $(E, \pi, M)_{\mathbb{C}}$ wie folgt:

Definition B.2.1 (Komplexifizierung eines Vektorraumbündels) [MS74, S. 173] Das komplexifizierte Vektorraumbündel von ξ ist $\xi \otimes \mathbb{C} = (E, \pi, M)_{\mathbb{C}}$, wobei der Basisraum und der Totalraum erhalten bleiben, also $(E, \pi, M)_{\mathbb{C}} = (E, \pi_{\mathbb{C}}, M)$ gilt. Dabei sind die Fasern gegeben durch $E_p \otimes \mathbb{C} = (E_p)_{\mathbb{C}}$, also durch die Komplexifizierungen der ursprünglichen Fasern.

Wir bezeichnen das komplexifizierte Bündel mit $\xi \otimes \mathbb{C}$ oder kurz mit $\xi_{\mathbb{C}}$.

Auch hier gilt für jedes $p \in M$ die direkte Summenzerlegung $E_p \otimes \mathbb{C} = E_p \oplus iE_p$.

Wir beobachten außerdem, dass der Endomorphismus

$$f \in \text{End}(E), f: x + iy \mapsto x - iy,$$

der durch die komplexe Konjugation gegeben ist, homöomorph ist. Zudem ist er \mathbb{R} -linear in jedem E_p und es gilt

$$f(i(x + iy)) = -if(x + iy).$$

Dies führt zu folgendem Lemma:

Lemma B.2.2 [MS74, S. 173; Lemma 15.1] Die Komplexifizierung $\xi_{\mathbb{C}}$ ist isomorph zum konjugierten Vektorraumbündel $\overline{\xi_{\mathbb{C}}}$.

C. Anhang: Strukturen auf Grassmann-Mannigfaltigkeiten

In Kapitel 4 werden Grassmann-Mannigfaltigkeiten verwendet. Aus diesem Grund sollen sie hier eingeführt werden. Dabei gehen wir analog zu [MS74] vor.

Sofern nicht anders angegeben, sei in diesem Kapitel stets $k \geq n$ vorausgesetzt.

C.1. Grassmann-Mannigfaltigkeiten

Definition C.1.1 [MS74, S. 56] Für natürliche Zahlen n und k ist die Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_n(\mathbb{R}^k)$ des $\mathbb{R}\mathbb{P}^k$ der Raum aller n -dimensionalen Untervektorräume durch den Ursprung des \mathbb{R}^k .

Dass es sich bei $G_n(\mathbb{R}^k)$ tatsächlich um eine glatte k -dimensionale Mannigfaltigkeit handelt, wurde beispielsweise in [MS74, S. 57: Lemma 5.1] gezeigt. Darüber hinaus wurde in [MS74, S. 57: Lemma 5.1] gezeigt, dass $G_n(\mathbb{R}^k)$ kompakt ist.

Um die Topologie auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit zu erklären, benötigen wir folgende Definition:

Definition C.1.2 (Rahmen) [MS74, S. 56] Ein n -dimensionaler Rahmen des \mathbb{R}^k ist ein n -Tupel von linear unabhängigen Vektoren des \mathbb{R}^k .

Fasst man sämtliche dieser n -dimensionalen Rahmen des \mathbb{R}^k zusammen, so erhält man eine offene Teilmenge im n -fachen kartesischen Produkt $\mathbb{R}^k \times \dots \times \mathbb{R}^k =: V_n(\mathbb{R}^k)$ ¹⁾. Betrachten wir nun die kanonische Funktion

$$\phi: V_n(\mathbb{R}^k) \rightarrow G_n(\mathbb{R}^k),$$

die jeden n -dimensionalen Rahmen auf die n -dimensionale Ebene abbildet, die der Rahmen aufspannt, so können wir die Quotiententopologie des $G_n(\mathbb{R}^k)$ wie folgt

¹⁾Die Mannigfaltigkeit $\mathbb{R}^k \times \dots \times \mathbb{R}^k$ bezeichnet man auch als Stiefel-Whitney-Mannigfaltigkeit.

C. Anhang: Strukturen auf Grassmann-Mannigfaltigkeiten

definieren: Eine Teilmenge $U \subset G_n(\mathbb{R}^k)$ heißt genau dann offen, wenn das Urbild $\phi^{-1}(U) \subset V_n(\mathbb{R}^k)$ offen ist.

Bemerkung C.1.3 [MS74, S. 57] Wir erhalten den reell projektiven Raum $\mathbb{R}P^{k-1}$ für $n = 1$ als Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_1(\mathbb{R}^k)$. Verallgemeinern wir dies, so erhalten wir, dass die Mannigfaltigkeit $G_n(\mathbb{R}^{n+1})$ der Hyperebenen des \mathbb{R}^{n+1} kanonisch homöomorph zum $\mathbb{R}P^n$ ist.

Um auch Vektorraumbündel über exotischeren Basisräumen betrachten zu können, ist es manchmal notwendig, die Dimension des \mathbb{R}^k gegen unendlich streben zu lassen. Sei dazu \mathbb{R}^∞ der Vektorraum, der aus allen unendlichen Folgen $x = (x_1, x_2, \dots)$ besteht, für die alle x_i bis auf endlich viele 0 sind. [MS74, S. 62]

Für festes n identifizieren wir den Unterraum, der aus allen $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$ besteht, mit dem Koordinatenraum \mathbb{R}^n . Demnach gilt $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \dots$ mit

$$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathbb{R}^i.$$

Damit können wir nun die unendliche Grassmann-Mannigfaltigkeit wie folgt definieren:

Definition C.1.4 (Unendliche Grassmann-Mannigfaltigkeit) [MS74, S. 63] Die unendliche Grassmann-Mannigfaltigkeit $G_n = G_n(\mathbb{R}^\infty)$ sei die Menge aller linearen n -dimensionalen Unterräume des \mathbb{R}^∞ , wobei wir eine Teilmenge des G_n als offen bzw. abgeschlossen bezeichnen, wenn der Durchschnitt mit $G_n(\mathbb{R}^k)$ für jedes $k \geq n$ offen beziehungsweise abgeschlossen in $G_n(\mathbb{R}^k)$ ist.

Bemerkung C.1.5 [MS74, S. 63] Die Topologie auf G_n ist wohldefiniert, da $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ die Vereinigung sämtlicher $G_n(\mathbb{R}^k)$ für $k \geq n$ ist.

Notation C.1.6 Wir bezeichnen die orientierte unendliche Grassmann-Mannigfaltigkeit mit $\tilde{G}_n = \tilde{G}_n(\mathbb{R}^\infty)$.

C.2. Kanonische Vektorraumbündel auf G_n

Im Folgenden wollen wir eine Struktur des kanonischen Vektorraumbündels $\gamma^n(\mathbb{R}^k)$, das auch als Universalbündel bezeichnet wird, zunächst auf $G_n(\mathbb{R}^k)$ und schließlich auch auf $G_n(\mathbb{R}^\infty)$ einführen.

Sei dazu $E = E(\gamma^n(\mathbb{R}^k))$ die Menge aller 2-Tupel der Form

(n -dimensionaler Unterraum im \mathbb{R}^k , Vektor in dem Unterraum).

Lemma C.2.1 [MS74, S. 57 ff.: u.a. Lemma 5.1, 5.2] Bei $y^n = (E, \pi, G_n(\mathbb{R}^k))$ handelt es sich um ein Vektorraumbündel, wobei E wie oben und π die Projektionsabbildung auf die erste Komponente sei.

Beweis: Topologisiert wird dieser Raum als eine Teilmenge von $\tilde{G}_n(\mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k$. Betrachte nun die Projektionsabbildung der Menge E in die Grassmann-Mannigfaltigkeit. Diese ist durch

$$\begin{aligned}\pi: E &\rightarrow G_n(\mathbb{R}^k) \\ \pi(X, x) &:= X\end{aligned}$$

gegeben. Die Vektorraumstruktur einer Faser ist gegeben durch

$$t_1 \cdot (X, x_1) + t_2(X, x_2) = (X, t_1 x_1 + t_2 x_2)$$

Wir müssen nun noch überprüfen, dass die Bedingung der lokalen Trivialität erfüllt ist.

Sei dazu U die Umgebung von $X_0 \in G_n(\mathbb{R}^k)$, welche aus allen n -dimensionalen Unterräumen W besteht, die $W \cap X_0^\perp = \{0\}$ erfüllen. Dann können wir einen Homöomorphismus $h: U \times X_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$ wie folgt definieren: Sei y der eindeutige Vektor in Y , der unter der Orthogonalprojektion $\tilde{\pi}$ des \mathbb{R}^k in X_0 auf x abgebildet wird. Damit ist der die Abbildung gegeben durch $h(Y, x) = (Y, y)$. Die Inverse von h berechnet sich zu

$$h^{-1}(Y, y) = (Y, \tilde{\pi}(y)).$$

Außerdem erfüllt h die Gleichung

$$h(Y, x) = (Y, x + T(Y)x),$$

wobei T die lineare Transformation von X_0 in das orthogonale Komplement X_0^\perp sei. Somit sind sowohl h als auch h^{-1} stetig und deshalb h ein Homöomorphismus. Aus diesem Grund ist y^n lokal trivial und ein Vektorraumbündel. \square

Definition C.2.2 (Gauß-Abbildung) [MS74, S. 60 f.] Sei $M \subset \mathbb{R}^k$ eine glatte n -dimensionale Mannigfaltigkeit. Die Abbildung $\nu: M \rightarrow G_n(\mathbb{R}^k)$, welche jeden Punkt $p \in M$ auf den Tangentialraum $T_p M \in G_n(\mathbb{R}^k)$ abbildet, heißt Gauß-Abbildung.

Die Gauß-Abbildung wird von der Bündel-Abbildung

$$\tilde{\nu}: E(\tau(M)) \rightarrow E(y^n(\mathbb{R}^k))$$

mit

$$\tilde{\nu}(p, v) = (T_p M, v)$$

überdeckt.

Da die Gauß-Abbildung stetig ist, ist insbesondere auch $\tilde{\nu}$ stetig.

C. Anhang: Strukturen auf Grassmann-Mannigfaltigkeiten

Bemerkung C.2.3 [MS74, S. 61] Für ausreichend großes k können nicht nur Tangentialbündel, sondern nahezu alle Vektorraumbündel des \mathbb{R}^n mit $\tilde{\nu}$ in das Vektorraumbündel $\gamma^n(\mathbb{R}^k)$ abgebildet werden. Deshalb wird γ^n auch als Universalbündel bezeichnet.

Wir betrachten nun das Vektorraumbündel γ^n auf der unendlichen Grassmann-Mannigfaltigkeit. Dieses ist analog zum endlichen Fall definiert:

Sei $E(\gamma^n) \subset G_n \times \mathbb{R}^\infty$ die Menge aller 2-Tupel

(n -dimensionaler linearer Unterraum des \mathbb{R}^∞ , Vektor in diesem Unterraum).

Wir statten nun E mit der Relativtopologie des kartesischen Produkts $G_n \times \mathbb{R}^\infty$ aus. Wie zuvor sei $\pi: E(\gamma^n) \rightarrow G_n$ die durch $\pi(X, x) = X$ definierte Projektionsabbildung. Die Vektorraumstrukturen der Fasern seien wieder durch

$$t_1 \cdot (X, x_1) + t_2(X, x_2) = (X, t_1x_1 + t_2x_2)$$

gegeben. Lediglich die Bedingung der lokalen Trivialität ist noch zu prüfen.

Dafür benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma C.2.4 [MS74, S. 64: Lemma 5.5] Seien $A_1 \subset A_2 \subset \dots$ und $B_1 \subset B_2 \subset \dots$ Folgen von lokal kompakten Räumen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} B_n = B$. Wir betrachten nun die Produkttopologie auf dem kartesischen Produkt $A \times B$. Diese stimmt dann mit der Topologie überein, die auf dem Grenzwert von $A_1 \times B_1 \subset A_2 \times B_2 \subset \dots$ definiert ist.

Beweis: Sei W offen in der Topologie des direkten Grenzwerts und sei $(a, b) \in W$ beliebig. Dann existiert ein Index i , sodass $(a, b) \in A_i \times B_i$. Wähle nun eine kompakte Umgebung K_i um $a \in A_i$ und eine kompakte Umgebung L_i um $b \in B_i$, sodass $K_i \times L_i \subset W$. Man kann nun wiederum kompakte Umgebungen K_{i+1} von K_i in A_{i+1} und L_{i+1} von L_i in B_{i+1} wählen, sodass $K_{i+1} \times L_{i+1} \subset W$. Führt man dieses Verfahren nun induktiv fort, so kann man Umgebungen $K_i \subset K_{i+1} \subset K_{i+2} \subset \dots$ und $L_i \subset L_{i+1} \subset L_{i+2} \subset \dots$ finden, die

$$\bigcup_i K_i = U$$

und

$$\bigcup_i L_i = V$$

erfüllen. Dann sind U und V offen und $(a, b) \in U \times V \subset W$. Also ist W auch offen in der Produkttopologie. \square

Unter Verwendung dieses Lemmas können wir nun beweisen, dass γ^n die Bedingung der lokalen Trivialität erfüllt.

Lemma C.2.5 [MS74, S. 64: Lemma 5.4] Bei γ^n handelt es sich um ein Vektorraumbündel, da die Bedingung der lokalen Trivialität erfüllt ist.

Beweis: Sei $X_0 \subset \mathbb{R}^\infty$ eine feste n -dimensionale Ebene, und sei $U \subset G_n$ die Menge aller n -dimensionalen Ebenen Y , die unter der orthogonalen Projection $\pi: \mathbb{R}^\infty \rightarrow X_0$ auf X_0 abgebildet werden.

Da der Durchschnitt

$$U_k = U \cap G_n(\mathbb{R}^k)$$

offen ist, ist auch U offen.

Betrachte nun die Abbildung $h: U \times X_0 \rightarrow \pi^{-1}(U)$, wie wir sie auch beim Beweis von C.2.1 verwendet haben. Dort haben wir auch gesehen, dass $h|_{U_k \times X_0}$ für jedes k stetig ist. Nach Lemma C.2.4 ist h selbst auch stetig.

Wie zuvor, impliziert

$$h^{-1}(Y, y) = (Y, \pi(y)),$$

dass die Inverse von h stetig ist. Also ist h ein Homöomorphismus. Demnach ist γ^n lokal trivial. \square

Definition C.2.6 (Orientiertes Universalbündel) [MS74, S. 145] Sei γ^n das Universalbündel über G_n . Dieses kann zu einem orientierten n -dimensionalen Vektorraumbündel $\tilde{\gamma}^n$ über \tilde{G}_n erweitert werden.

Wir nennen $\tilde{\gamma}^n$ das orientierte Universalbündel.

Bemerkung C.2.7 Ist ξ ein orientiertes Vektorraumbündel vom Rang n , so kann jede Bündelabbildung $\xi \rightarrow \gamma^n$ eindeutig zu einer orientierungserhaltenden Bündelabbildung $\xi \rightarrow \tilde{\gamma}^n$ erweitert werden. Demnach sind orientierte Vektorraumbündel wohldefiniert.

Symbolverzeichnis

Symbol	Bedeutung
w	Stiefel-Whitney-Klasse
χ	Euler-Klasse
γ	Chern-Klasse
p	Pontryagin-Klasse
I	Integritätsring
Λ	kommutativer Ring
K	Körper
T	topologischer Raum
M	topologische oder glatte Mannigfaltigkeit
V	Vektorraum
$V_{\mathbb{C}}$	Komplexifizierung des Vektorraums V
X, Y	glatte Vektorfelder
$\beta, \beta_1, \dots, \beta_n$	glatte Schnitte
$\mathbb{C}P^n$	n -dimensionaler komplex projektiver Raum
$\mathbb{R}P^n$	n -dimensionaler reell projektiver Raum
$T_p M$	Tangententialraum an M in $p \in M$
G_n	Grassmann-Mannigfaltigkeit
\tilde{G}_n	orientierte Grassmann-Mannigfaltigkeit
$SO(V)$	Lie-Algebra der schiefsymmetrischen Endomorphismen von V
$GL(n, \mathbb{C})$	allgemeine lineare Gruppe der regulären $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{C}
$\text{Mat}(n, \mathbb{C})$	Raum aller $n \times n$ -Matrizen über \mathbb{C}
$H^k(M; K)$	k -te singuläre Kohomologie-Gruppe von M mit Koeffizienten aus K
$H^*(M; K)$	Ring mit Elementen $a = a_0 + a_1 + \dots$ mit $a_i \in H^i(M; K)$
$H^{**}(M; K)$	Ring mit Elementen $a = a_0 + a_1 + \dots$ mit $a_i \in H^{2i}(M; K)$
J	komplexe Struktur
g	Riemannsche Metrik
f^*	Pullback von f
∇	Zusammenhang
Ω	Krümmungsmatrix

Symbolverzeichnis

R^∇	Krümmungstensor
ω	Zusammenhangsmatrix
$\text{Pf}(A)$	Pfaffsche von A
\mathbb{P}	invariantes Polynom
i	Inklusionsabbildung
vol	Volumenform
ξ, ξ_1, ξ_2	reelles oder komplexes Vektorraumbündel
$\xi_1 \oplus \xi_2$	Whitney-Summe von ξ_1 und ξ_2
$\bar{\xi}$	konjugiertes Bündel
$\xi_{\mathbb{C}}$	Komplexifizierung des Bündels
Φ, Φ_1, Φ_2	lokale Trivialisierungen
$\xi_{\mathbb{R}}$	einem komplexen Vektorraumbündel untergeordnetes reelles Bündel
ρ	Geradenbündel
τ	Tangentialbündel
γ^n	kanonisches Vektorraumbündel vom Rang n , Universalbündel
π	Projektionsabbildung
ν	Gauß-Abbildung
Δ_n	Standard- n -Simplex
σ_n	singulärer n -Simplex
Φ_i	lineare Einbettung $\Phi_i: \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$
$C_n(T; \Lambda)$	singuläre Ketten-Gruppe

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich die Gelegenheit nutzen und mich bei all denjenigen bedanken, ohne die das Verfassen meiner Bachelorarbeit in diesem Rahmen nicht möglich gewesen wäre.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. Smoczyk für die Bereitstellung des interessanten Themas, die angenehme fachliche Betreuung und die Bewertung meiner Bachelorarbeit. Ein besonderer Dank gilt ihm außerdem für die Begleitung im Verlauf meines gesamten Bachelorstudiums sowohl im Rahmen von Grundlagen- als auch Spezialisierungsvorlesungen.

Außerdem möchte ich dem gesamten uniKIK-Team für die ständige Hilfsbereitschaft und Unterstützung danken. Vor allem möchte ich mich bei Ina Fedrich, Dr. Florian Leydecker und Swantje Ludwig bedanken, die mir nicht nur moralisch zur Seite standen, sondern den Lernprozess und die persönliche Entwicklung, die ich beim Verfassen dieser Arbeit durchlaufen durfte, durch ihre (Lebens-)Erfahrung maßgeblich beeinflusst haben. Vielen Dank, dass ihr immer ein offenes Ohr für mich hattet!

Mein weiterer Dank gilt meinen Korrekturleserinnen, -lesern, Kommilitoninnen und Kommilitonen Philip Bleeker, Thorben Funke, Björn Koch, Felix Lapossa, Jens Mahlmann, Sonja Menßen, Silke Neuhaus, Sabine Paul, Sebastian Schreiber und Jan Wittler. Darüber hinaus möchte ich bei meinen anderen Kommilitoninnen und Kommilitonen bedanken, ohne die mein bisheriges Studium nicht so spannend und abwechslungsreich gewesen wäre.

Zuletzt möchte ich meiner Familie und meinen Freunden für die Unterstützung und die Nachsicht danken, die mir in den vergangenen drei Monaten entgegengebracht wurde.

Literaturverzeichnis

- [Bä] Christian Bär. *Charakteristische Klassen - Crashkurs, MPI für Gravitationsphysik [online]*. geometrie.math.uni-potsdam.de/documents/baer/skripte/charakteristisch.pdf. Universität Potsdam, Institut für Geometrie. eingesehen am 01. März 2014.
- [BT82] Raoul Bott and Loring W. Tu. *Differential forms in algebraic topology*, volume 82 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [Dup78] Johan L. Dupont. *Curvature and characteristic classes*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 640. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1978.
- [Hat] Allen Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory [online]*. www.math.cornell.edu/hatcher/VBKT/VB.pdf. Cornell University, Department of Mathematics. eingesehen am 01. März 2014.
- [Lee11] John M. Lee. *Introduction to topological manifolds*, volume 202 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2011.
- [Lee13] John M. Lee. *Introduction to smooth manifolds*, volume 218 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, second edition, 2013.
- [MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1974. *Annals of Mathematics Studies*, No. 76.
- [MT97] Ib Madsen and Jørgen Tornehave. *From calculus to cohomology. de Rham cohomology and characteristic classes*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

Selbstständigkeitserklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig und ohne fremde Hilfe verfasst und keine anderen Hilfsmittel als angegeben verwendet habe. Die vorliegende Arbeit ist frei von Plagiaten. Alle Ausführungen, die wörtlich oder inhaltlich aus anderen Werken entnommen sind, habe ich als solche kenntlich gemacht.

Diese Arbeit wurde in gleicher oder ähnlicher Form noch bei keinem anderen Prüfer als Prüfungsleistung eingereicht und ist auch noch nicht veröffentlicht.

Ort:

Datum:

Unterschrift: